MATEMÁTICA A

12º ANO

Funções

ANTÓNIO LEITE

2021

FUNÇÕES

Teorema de Bolzano-Cauchy

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a,b] \subset D_f$, então, para qualquer número real $k \in]f(a), f(b)[$, existe pelo menos um número real $c \in]a,b[$, tal que $f(c) = k$.

Corolário do teorema de Bolzano-Cauchy

Se f é contínua num intervalo $[a,b] \subset D_f$ e se $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelo menos um número real $c \in]a,b[$, tal que $f(c) = 0$.

Concavidades e pontos de inflexão

Seja f uma função real de variável real duas vezes diferenciável num intervalo I.

- O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em I se e só se $\forall x \in I,\ f''(x) > 0$ (ou seja f' é estritamente crescente em I).
- O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em I se e só se $\forall x \in I,\ f''(x) < 0$ (ou seja f' é estritamente decrescente em I).
- O ponto de coordenada $(c, f(c))$, com $c \in D_f$, é um ponto de inflexão do gráfico de f se e só se existem números reais $a < c$ e $b > c$ tais que $[a,b] \subset D_f$ e a concavidade do gráfico de f no intervalo $[a,c]$ tem sentido contrário à concavidade do gráfico de f no intervalo $[c,b]$.
- Se f é uma função duas vezes diferenciável num intervalo I e se o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $c \in I$, então $f''(c) = 0$. A afirmação recíproca não é verdadeira.

Segunda derivada e extremos

Seja f uma função duas vezes diferenciável em $I =]a,b[$ e $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$

- Se $f''(c) > 0$, a função f tem um mínimo local em c;
- Se $f''(c) < 0$, a função f tem um máximo local em c.

Número de Neper

O número de Neper é um número irracional (dízima infinita não periódica), representa-se por e, e é dado por:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Regras operatórias em potências de expoente irracional

Sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = \dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $a^0 = 1$

Função exponencial de base a

A função f real de variável real definida por uma expressão do tipo $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, designa-se por função exponencial.

- $D_f = \mathbb{R}$;
- $D'_f = \mathbb{R}^+$
- f é injetiva
- f é contínua
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, se $a \in]1, +\infty[$
  f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, se $a \in]0, 1[$
- O gráfico de f tem uma única assíntota, a reta de equação $y = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, se $a \in]1, +\infty[$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, se $a \in]0, 1[$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, se $a \in]1, +\infty[$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, se $a \in]0, 1[$

Equações e Inequações envolvendo exponenciais

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$, se $a \in]1, +\infty[$
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$, se $a \in]0, 1[$

Função logarítmica de base a

A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por uma expressão do tipo $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, designa-se por função logarítmica de base a.

- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $D'_f = \mathbb{R}$
- f é injetiva

- f é contínua
- f é estritamente crescente se $a \in]1, +\infty[$
  f é estritamente decrescente se $a \in]0, 1[$
- O gráfico de f tem uma única assíntota, a reta de equação $x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$, se $a \in]1, +\infty[$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$, se $a \in]0, 1[$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$, se $a \in]1, +\infty[$

  $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$, se $a \in]0, 1[$
- Propriedades
  - $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}^+$
  - $\log_a a^x = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$
  - $a^{\log_a x} = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$
- Logaritmo decimal e logaritmo neperiano

  $\log x \to$ logaritmo decimal (de base 10)

  $\ln x \to$ logaritmo neperiano (de base e)

Propriedade operatórias da função logaritmo

- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a (x^y) = y \log_a x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Equações e Inequações envolvendo exponenciais

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$

- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
- $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$, se $a \in]1, +\infty[$

  $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$, se $a \in]0, 1[$

  $\log_a x < k \Leftrightarrow x < a^k$, se $a \in]1, +\infty[$

  $\log_a x < k \Leftrightarrow x > a^k$, se $a \in]0, 1[$

Limites notáveis

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, \; (p \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Regras de derivação

- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(a^u)' = u'a^u \ln a, \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}, \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$