

MATEMÁTICA A

11º ANO

---

**Trigonometria**

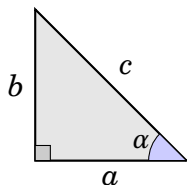
---

ANTÓNIO LEITE

2021

## TRIGONOMETRIA

### Razões trigonométricas de um ângulo agudo



$$\bullet \sin \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\bullet \cos \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

### Relação entre as razões trigonométricas de ângulos complementares

$$\bullet \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$\bullet \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)}$$

### Razões trigonométricas dos ângulos de amplitude 30°, 45°, 60°

		Graus e Radianos		
$\alpha$	30°	45°	60°	
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

### Fórmulas trigonométricas

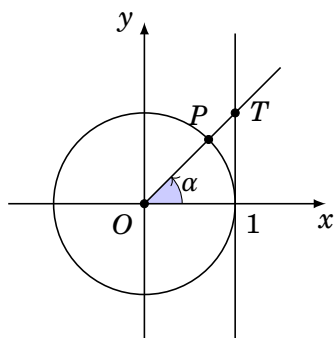
$$\bullet \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\bullet 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\bullet 1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

## Circunferência trigonométrica



- $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ;
- $T(1, \tan \alpha)$ ;
- $\cos \alpha \in [-1, 1]$ ;
- $\sin \alpha \in [-1, 1]$ ;
- $\tan \alpha \in \mathbb{R}$ .

## Relação entre as razões trigonométricas de $\alpha$ e as de $-\alpha$ , $\pi \pm \alpha$ , $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ , $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha \quad \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha}$$

## Função seno

Seja  $f(x) = \sin x$ , temos então:

- $D_f = \mathbb{R}$  ;  $D'_f = [-1, 1]$ .
- Expressão geral dos zeros:  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Expressão geral dos maximizantes:  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Expressão geral dos minimizantes:  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Paridade: é uma função ímpar, pois  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$ .
- Período: O período fundamental da função seno é  $2\pi$ .

**Nota:**  $f$  é periódica de período  $P$ , sendo  $P > 0$ , se  $\forall x \in D_f, x+P \in D_f$  e  $f(x+P) = f(x)$

Ao menor valor positivo,  $P_0$ , do período de uma função periódica chamamos período fundamental ou período positivo mínimo.

## Função cosseno

Seja  $g(x) = \cos x$ , temos então:

- $D_g = \mathbb{R}; D'_g = [-1, 1]$ .
- Expressão geral dos zeros:  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Expressão geral dos maximizantes:  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Expressão geral dos minimizantes:  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Paridade: é uma função par, pois  $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$ .
- Período: O período fundamental da função cosseno é  $2\pi$ .

## Função tangente

Seja  $h(x) = \tan x$ , temos então:

- $D_h = \mathbb{R} \setminus \{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}; D'_h = \mathbb{R}$ .
- Expressão geral dos zeros:  $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- Paridade: é uma função ímpar, pois  $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(-x) = -\tan x$ .
- Período: O período fundamental da função tangente é  $\pi$ .

## Equações trigonométricas

- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .