MATEMÁTICA A

12º ANO

Números Complexos

ANTÓNIO LEITE

2021

NÚMEROS COMPLEXOS

Forma algébrica

$$z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R};\ i = \sqrt{-1}$$

- a é a parte real de z; $\operatorname{Re}(z) = a$;
- bi é a parte imaginária de z;
- b é o coeficiente da parte imaginária de z; $\operatorname{Im}(z) = b$;
- z é um número real se e só se $\operatorname{Im}(z) = 0$;
- z é um imaginário puro se e só se $\operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) \neq 0$;
- $P(a, b)$ é o afixo ou imagem geométrica de z.

Potências de base i

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Temos portanto que, $i^n = i^r$, sendo n um número inteiro não negativo e r o resto da divisão inteira de n por 4.

Nota: $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

Simétrico e conjugado de z

Seja $z = a + bi$

- Simétrico de z: $-z = -a - bi$
- Conjugado de z: $\overline{z} = a - bi$

Igualdade de dois números complexos na forma algébrica

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Propriedades dos números complexos conjugados

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z \times w} = \overline{z} \times \overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Módulo de um número complexo

Se $z = a + bi$ então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (distância, no plano complexo, entre a origem e o afixo de z).

Quociente de dois números complexos na forma algébrica

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Propriedades

- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z|^2 = z \times \overline{z}$
- $|zw| = |z| \times |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $\overline{\left(\frac{w}{z}\right)} = \frac{\overline{w}}{\overline{z}}$

Forma trigonométrica

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Onde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e θ é um argumento de z ($\theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ também são argumentos de z).

Ao argumento de z que pertence a $]-\pi, \pi]$ chama-se argumento principal de z e representa-se por $\text{Arg}(z)$.

Temos ainda que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (fórmula de Euler).

Igualdade de números complexos na fórmula trigonométrica

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1|e^{i\theta_1} = |z_2|e^{i\theta_2} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Simétrico e conjugado de z na forma trigonométrica

Seja $z = |z|e^{i\theta}$

- Simétrico de z: $-z = |z|e^{i(\theta+\pi)}$
- Conjugado de z: $\overline{z} = |z|e^{-i\theta}$

Operações na forma trigonométrica

- Multiplicação: $z_1 \times z_2 = \left(|z_1|e^{i\theta_1}\right) \times \left(|z_2|e^{i\theta_2}\right) = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- Potenciação: $z^n = \left(|z|e^{i\theta}\right)^n = |z|^n e^{in\theta}$

Raízes n-ésimas de números complexos

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|e^{i\theta}}\\ &= \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},\ k \in \{0,1,\cdots,n-1\}\end{aligned}$$

- As raízes têm todas o mesmo módulo;
- Os argumentos das n raízes estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$;
- Os afixos das raízes de ordem n $(n \in \mathbb{N} \wedge n > 2)$ de um número complexo z, não nulo, são vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e de raio $\sqrt[n]{|z|}$.

Transformações geométricas em $\mathbb{C}$

- O afixo de $\overline{z}$ é a imagem do afixo de z pela reflexão axial do eixo real.
- Sendo $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$ $(x, y, a, b \in \mathbb{R})$, o afixo de $z + z_0$ é a imagem do afixo de z pela translação de vetor $\vec{u}(a, b)$.
- O afixo do número complexo $e^{i\theta} \times z$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e ângulo generalizado de amplitude θ.
- O afixo do número complexo $z \times z_0$ (z_0 não nulo) é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e ângulo orientado de amplitude θ_0, argumento de z_0, composta com a homotetia de centro na origem do referencial e razão $|z_0|$.

Domínios planos e condições na variável complexa

- **Retas paralelas ao eixos coordenados**
  - $\text{Re}(z) = a \rightarrow$ reta vertical, paralela ao eixo imaginário, que passa pelo ponto de coordenadas $(a, 0)$.
  - $\text{Im}(z) = b \rightarrow$ reta horizontal, paralela ao eixo real, que passa pelo ponto de coordenadas $(0, b)$.
- **Circunferência e círculo**
  - $|z - z_1| = r \rightarrow$ circunferência de centro no afixo de z_1 e raio r.
  - $|z - z_1| \leq r \rightarrow$ círculo de centro no afixo de z_1 e raio r.

- **Mediatriz de um segmento de reta e semiplanos**

  - $|z-z_1| = |z-z_2| \rightarrow$ mediatriz do segmento de reta $[AB]$, sendo A e B os afixos de z_1 e z_2, respetivamente.
  - $|z-z_1| \geq |z-z_2| \rightarrow$ semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta $[AB]$, a que pertence B.
  - $|z-z_1| \leq |z-z_2| \rightarrow$ semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta $[AB]$, a que pertence A.

- **Semirretas e ângulos**

  - $\text{Arg}(z-z_1) = \theta \rightarrow$ semirreta de origem no afixo de z_1 e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude θ.
  - $\theta_1 \leq \text{Arg}(z-z_1) \leq \theta_2 \rightarrow$ ângulo de vértice no afixo de z_1 definido por semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitude θ_1 e θ_2, respetivamente.