PLANO α

MATEMÁTICA A

12º ANO

Probabilidades

ANTÓNIO LEITE

2021

PROBABILIDADES

Propriedades das operações sobre conjuntos

Comutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Idempotência	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Elementro Neutro	$A \cap \mathbb{U} = A$	$A \cup \emptyset = A$
Elemento Absorvente	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

Propriedades da inclusão de conjuntos

- $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
- $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
- $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

Leis de De Morgan

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Fatorial de um número natural

$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$
Nota: $0! = 1$

Arranjos com repetição

Interessa a ordem dos elementos e estes podem repetir-se.

$$^{n}A'_{p} = n^{p}$$

Arranjos sem repetição

Interessa a ordem dos elementos e estes não se podem repetir, mas não entram todos na sequência.

$$^nA_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutações de n elementos

Interessa a ordem dos elementos e estes não se podem repetir, mas entram todos na sequência.

$$P_n = {}^nA_n = n!$$

Combinações

Não interessa a ordem dos elementos e estes não se podem repetir

$$^nC_p = \frac{^nA_p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriedades das combinações

- $^nC_p = {}^nC_{n-p}$
- $^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p = (1+1)^n = 2^n$
- $^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$

Triângulo de Pascal - Propriedades

- O primeiro elemento e o último elemento de cada linha são iguais a 1, ou seja, $^nC_0 = {}^nC_n = 1$.
- O segundo elemento e o penúltimo elemento de cada linha são iguais, ou seja, $^nC_1 = {}^nC_{n-1} = n$.
- A linha n tem $n+1$ elementos.
- Em cada linha os elementos equidistantes dos extremos são iguais, ou seja, $^nC_p = {}^nC_{n-p}$.
- Cada elemento, exceto os extremos, é igual à soma dos dois elementos que estão por cima dele, ou seja, $^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$.
- A soma de todos os elementos da linha n é igual a 2^n.
- Se n for par, o maior elemento da linha n é igual a $^nC_{\frac{n}{2}}$.
  No caso de n ser ímpar, na linha n há dois elementos iguais, que são maiores que todos os outros, são eles $^nC_{\frac{n-1}{2}}$ e $^nC_{\frac{n+1}{2}}$.

Binómio de Newton

- $(a+b)^n = {}^nC_0\ a^n b^0 + {}^nC_1\ a^{n-1}b^1 + {}^nC_2\ a^{n-2}b^2 + \cdots + {}^nC_n\ a^0 b^n$
- $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} {}^nC_p\ a^{n-p}b^p$
- Termo de ordem $p+1$: $T_{p+1} = {}^nC_p\ a^{n-p}b^p$

Classificação de Acontecimentos

- O conjunto vazio designa-se por acontecimento impossível.
- O conjunto E (espaço amostral ou universo de resultados) designa-se por acontecimento certo.
- Dois acontecimentos A e B são incompatíveis, disjuntos ou mutuamente exclusivos se $A \cap B = \emptyset$.
- Dois acontecimentos A e B são complementares ou contrários se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$.
- O contrário de A representa-se por $\overline{A}$.
- Dois acontecimentos A e B são equiprováveis se $P(A) = P(B)$.
- Um acontecimento A é elementar se $\#A = 1$.
- Um acontecimento B é composto se $\#B \geq 2$.

Definição de Laplace

Num espaço de resultados E, constituído por um número finito de elementos, se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de acontecimento de A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência de A e o número de casos possíveis, ou seja,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

Propriedades da função de probabilidade

- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ P(A) \in [0,1]$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Se $A \subset B$, então $P(A \setminus B) = P(B) - P(A)$ e $P(A) \leq P(B)$

Probabilidade condicionada

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) \neq 0$$

Daqui resulta que:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B),\ P(B) \neq 0$$

E analogamente:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A),\ P(A) \neq 0$$

Acontecimentos independentes

A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Ou se e só se $P(B) = 0$ ou $P(A \mid B) = P(A)$, $P(B) \neq 0$.

Esquemas

	B	$\overline{B}$	Total
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A}\cap B)$	$P(\overline{A}\cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Tabela

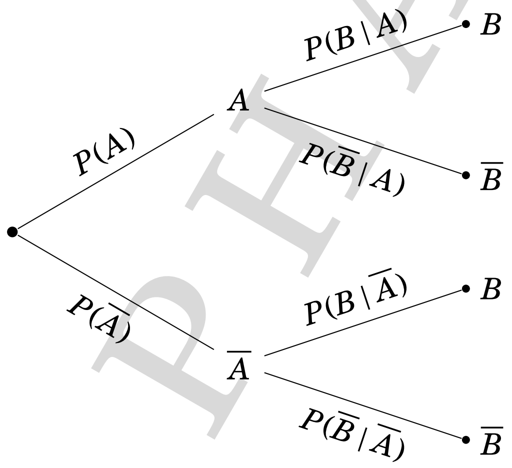

Diagrama em árvore

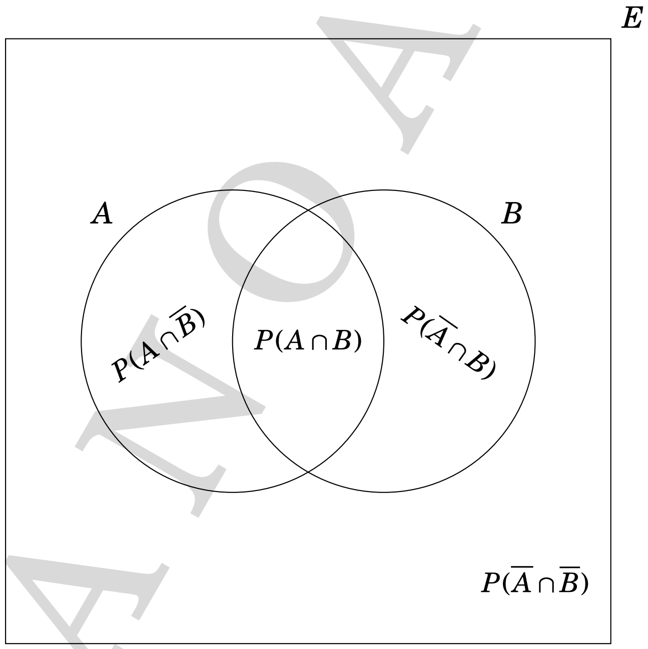

Diagrama de Venn