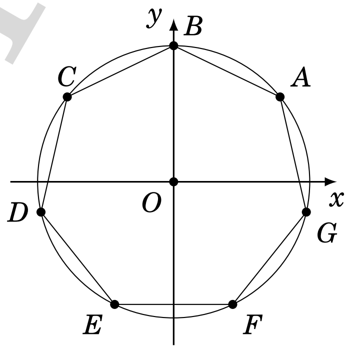
11º ANO | FICHA 6 | 2021

António Leite

1. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e o heptágono regular $[ABCDEFG]$ inscrito na circunferência.



1.1. Sendo $\dot{O}C$ o lado de origem, indique o lado extremidade dos ângulos generalizados definidos por:

1.1.1. $\left(\frac{20\pi}{7}\text{ rad}, 2\right)$

1.1.2. $\left(-\frac{32\pi}{7}\text{ rad}, -5\right)$

1.2. Determine a medida do perímetro do heptágono regular $[ABCDEFG]$.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Sabe-se que $\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)}{3}$ e $\alpha \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor exato da seguinte expressão:

$$\sqrt{3}\sin\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) - 2\tan\left(\frac{13}{2}\pi+\alpha\right)$$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, b primo, $c \in \mathbb{N}$.

3. Sabe-se que $\sin\beta\cos\beta = \frac{12}{25}$ e $\beta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

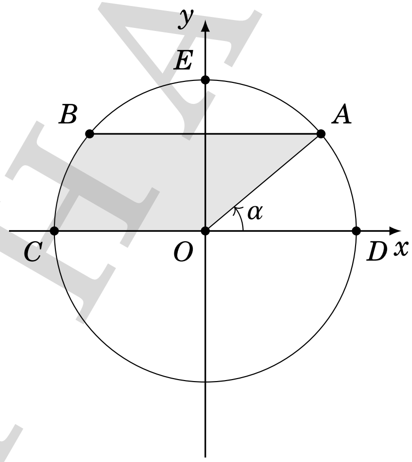
3.1. Mostre que $\dfrac{(1+\tan\beta)^2}{1+\tan^2\beta} = (\sin\beta+\cos\beta)^2$, para qualquer $\beta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

3.2. Qual o valor da expressão $\dfrac{(1+\tan\beta)^2}{1+\tan^2\beta}$?

(A) $\frac{19}{25}$ **(B)** $\frac{24}{25}$ **(C)** $\frac{49}{25}$ **(D)** 2

4. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio $\sqrt{2}$.
Sabe-se que:

- os pontos C e D pertencem ao eixo Ox
- $[CD]$ é um diâmetro da circunferência
- o ponto E pertence ao semieixo positivo Oy
- o ponto A desloca-se ao longo do arco DE, nunca coincidindo com o ponto D, nem com o ponto E
- para cada posição do ponto A, considere a região sombreada, onde a corda $[AB]$ é sempre paralela ao diâmetro $[CD]$.
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOA

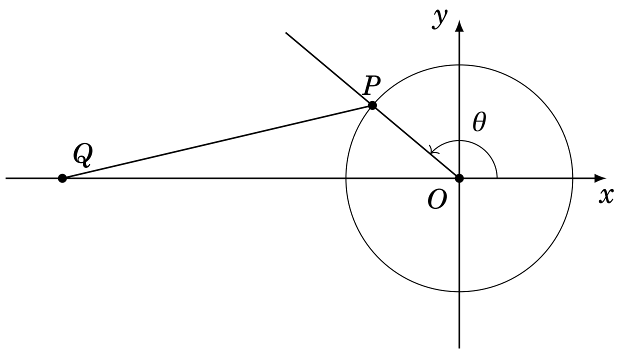


4.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, por $\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

4.2. Admita que, para uma certa posição do ponto A, se tem $\cos\alpha = \frac{\sqrt{12}}{4}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Determine, para essa posição do ponto A, o valor exato da área da região sombreada.

5. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e o ponto Q de coordenadas $(-5, 0)$.

Considere que um ponto P se move ao longo da circunferência trigonométrica.
Para cada posição do ponto P, seja θ a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$, com $\theta \in [0, 2\pi[$.



A medida do comprimento do segmento de reta $[QP]$, em função de θ é dada por:

(A) $\sqrt{25+\cos^2\theta}$

(B) $\sqrt{26}$

(C) $\sqrt{25+\sin^2\theta}$

(D) $\sqrt{26+10\cos\theta}$

FIM

Soluções

1.

1.1.

1.1.1. $\dot{O}F$

1.1.2. $\dot{O}A$

1.2. $6,1$

2. $\frac{3\sqrt{11}}{2}$

3.

3.2. **(C)**

4.

4.2. $\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}$

5. **(D)**