12º ANO | FICHA 12 | 2022

António Leite

1. Utilize a definição de derivada de uma função num ponto para calcular:

   1.1. $f'(3)$, sendo $f(x) = x^2 + 2$.

   1.2. $g'(1)$, sendo $g(x) = -x + x^3$.

   1.3. $h'(-1)$, sendo $h(x) = \dfrac{x}{3-x}$.

   1.4. $j'\left(\frac{1}{2}\right)$, sendo $j(x) = \sqrt{4x+7}$.

2. Considere a sucessão (x_n) de termo geral $x_n = \dfrac{2-3n}{n+1}$.

   Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, definida por $f(x) = \dfrac{-x}{x+3}$.

   Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

   (A) $-\infty$ **(B)** -3 **(C)** 3 **(D)** $+\infty$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   Resolva os seguintes itens sem recorrer à calculadora.

   3.1. Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = -2$.

   3.2. Mostre que o gráfico de f tem uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$ e apresente uma equação dessa assíntota.

   3.3. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]-\infty, 0[$.

   Na sua resposta apresente:

   - o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.
   - o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima.
   - a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso esta(s) exista(m).

4. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, respetivamente, definidas por:

$$f(x) = (2x-1)^2 \text{ e } g(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

4.1. Determine:

4.1.1. $(f+g)'(3)$

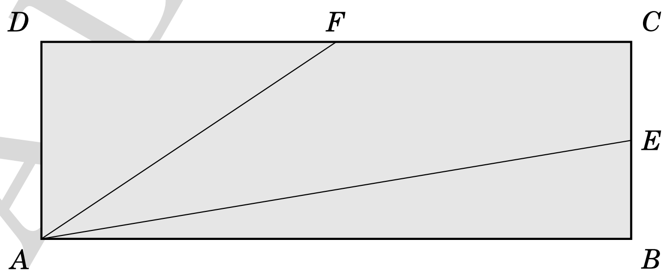
4.1.2. $(f \times g)'(0)$

4.1.3. $\left(\frac{g}{f}\right)'(1)$

4.1.4. $(f \circ g)'(1)$

4.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = f(x) - (5x + x^2 - x^3)$.
Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

5. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- E é o ponto médio de $[BC]$
- F é o ponto médio de $[DC]$
- $\overline{AB} = 3 \times \overline{BC}$

Mostre que $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FA} = -5 \times \overline{BC}^2$.

FIM

Soluções

1.

1.1. 6

1.2. 2

1.3. $\dfrac{3}{16}$

1.4. $\dfrac{2}{3}$

2. **(D)**

3.

3.1. $y = -\frac{12}{25}x - \frac{64}{25}$

3.2. $y = -3$

3.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\sqrt{3}]$.
E voltada para cima em $[-\sqrt{3},0[$.
Tem um ponto um ponto de inflexão de abcissa $-\sqrt{3}$.

4.

4.1.

4.1.1. 15

4.1.2. $\dfrac{1}{4}$

4.1.3. -1

4.1.4. 12

4.2. A função h é estritamente crescente em $]-\infty,\ -3]$ e em $[1,\ +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-3,1]$.
$h(-3) = 28$ é máximo relativo.
$h(1) = -4$ é mínimo relativo.