

12º ANO | FICHA 18 | 2022

António Leite

1. Seja a um número real diferente de zero.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$?

- (A) $2\sin(a)$ (B) $2\cos(a)$ (C) $\sin(2a)$ (D) $\cos(2a)$

2. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{14\sin(3-x)}{2x^2 - 5x - 3} & \text{se } x > 3 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{k}{4} & \text{se } x \leq 3, k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Determine k , sem recorrer à calculadora, sabendo que a função f é contínua em $x = 3$.

3. Sejam f e g as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por $f(x) = \cos(2x) + 1$ e $g(x) = 1 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

3.1. Qual dos seguintes é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - f(x) - g(x)}{x}$?

- (A) 3 (B) 0 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) -1

3.2. Mostre, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Seja h a função de domínio $[0, \pi]$, definida por $h(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$.

4.1. Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

4.2. Determine, usando a definição de derivada de uma função num ponto, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5. Considere nove fichas, indistinguíveis ao tato, quatro vermelhas, todas iguais e as restantes cinco numeradas de 1 a 5.

Na figura ao lado está representado um tabuleiro com doze casas, dispostas em três filas horizontais (A, B e C) e quatro filas verticais (1, 2, 3 e 4).

Pretende-se dispor as nove fichas no tabuleiro de modo que cada ficha ocupe uma única casa e cada casa não seja ocupada por mais do que uma ficha.

	1	2	3	4	
					A
					B
					C

- 5.1. Qual a probabilidade de as fichas vermelhas ocuparem a mesma fila horizontal? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
- 5.2. De quantas maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as fichas vermelhas se distribuam por exatamente duas filas horizontais?

FIM

Soluções

1. (B)

2. $k = -4$

3.

3.1. (C)

4.

4.1. h é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

h é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Mínimos relativos: $h(0) = 0$ e $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

Máximo relativo: $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

4.2. -1

5.

5.1. $\frac{1}{165}$

5.2. 1370880