12º ANO | FICHA 17 | 2022

António Leite

1. Considere $\theta \in \left]-\pi, 0\right[\ \wedge \ \sin\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$.

Determine o valor exato de $\sin(3\theta)$.

2. Resolva, em $[0, 2\pi]$, cada uma das seguintes equações:

2.1. $2\sin^2 x + \sin x = 0$

2.2. $2\cos^2 x = \cos x$

2.3. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

2.4. $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

2.5. $\sin^2 x = 2 - \cos x$

2.6. $\cos(2x) - 1 = -3\cos x$

2.7. $2\sin x \cos x + 3\sin x = 0$

2.8. $\cos(2x) - \cos x = 0$

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + \sin(3x)}{x} & \text{se } x > 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x^2 + 5x}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.

4. Três termos consecutivos de uma progressão geométrica são dados para um certo valor de k, respetivamente por $k - 1$, $2k$ e $21 - k$.

Determine esses três termos.

Apresente todas as soluções possíveis.

5. Considere a função f, de domínio $]-\pi,\ \pi]$, definida por $f(x)=\sin^2 x+2$.

5.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.
Na sua resposta apresente:

- o(s) intervalo(s) de monotonia;
- o(s) extremo(s) relativo(s) da função f.

5.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

FIM

Soluções

1. $-\dfrac{44}{125}$

2.

2.1. $x=0 \vee x=\pi \vee x=\dfrac{7\pi}{6} \vee x=\dfrac{11\pi}{6} \vee x=2\pi$

2.2. $x=\dfrac{\pi}{3} \vee x=\dfrac{\pi}{2} \vee x=\dfrac{3\pi}{2} \vee x=\dfrac{5\pi}{3}$

2.3. $x=\dfrac{\pi}{3} \vee x=\pi \vee x=\dfrac{5\pi}{3}$

2.4. $x=\dfrac{7\pi}{6} \vee x=\dfrac{3\pi}{2} \vee x=\dfrac{11\pi}{6}$

2.5. $x \in \varnothing$

2.6. $x=\dfrac{\pi}{3} \vee x=\dfrac{5\pi}{3}$

2.7. $x=0 \vee x=\pi \vee x=2\pi$

2.8. $x=0 \vee x=\dfrac{2\pi}{3} \vee x=\dfrac{4\pi}{3} \vee x=2\pi$

3. f é contínua em $\mathbb{R}$

4. 2, 6 e 18 ou $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{14}{5}$ e $\dfrac{98}{5}$

5.

5.1. f é estritamente decrescente em $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ e em $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

f é estritamente crescente em $\left]-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right]$ e em $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=3$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ são máximos relativos.
$f(0)=2$ e $f(\pi)=2$ são mínimos relativos.

5.2. O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$ e em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[-\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ e voltada para baixo em $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Tem 4 pontos de inflexão de abcissas $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.