# 11º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 2 | 2022

António Leite

**1.** $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\cos\alpha=\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos\alpha=-\frac{3}{5}$

Como $\cos\alpha=-\frac{3}{5} \wedge \alpha \in ]-\pi,0[ \Rightarrow \alpha \in \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$.

Por outro lado, tem-se que:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\tan(\alpha-\pi)=-\sin\alpha-2\tan\alpha$$

Recorrendo à formula fundamental da trigonometria,

$$\sin^2\alpha+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin\alpha=-\frac{4}{5} \vee \sin\alpha=\frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[$, então, $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$.

Calculemos o valor de $\tan\alpha$:

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, portanto, $\tan\alpha=\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \tan\alpha=\frac{4}{3}$

Assim, $-\sin\alpha-2\tan\alpha=-\left(-\frac{4}{5}\right)-2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{5}-\frac{8}{3}=-\frac{28}{15}$.

Resposta: $-\frac{28}{15}$

**2.** $(u_n)$ é uma progressão geométrica não monótona e $u_3=4$ e $u_7=324$.

Sendo $r$ a razão desta progressão, tem-se que:

$$u_7=u_3\times r^4 \Leftrightarrow 324=4r^4 \Leftrightarrow r^4=81 \Leftrightarrow r=-\sqrt[4]{81} \vee r=\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow r=-3 \vee r=3$$

Como $(u_n)$ é uma progressão geométrica não monótona, $r<0$, pelo que $r=-3$.

Logo, $u_{10}=u_3\times r^7$, por exemplo.

$u_{10}=4\times(-3)^7 \Leftrightarrow u_{10}=-8748$

Resposta: **(C)**

**3.** Ora, $-3y-2x+4=0 \Leftrightarrow 3y=-2x+4 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.

Daqui resulta que o declive da reta $r$ é $-\frac{2}{3}$.

Como a reta $t$ é perpendicular à reta $r$, o declive da reta $t$ é $\frac{3}{2}$.

Por outro lado, a circunferência definida pela equação $(x-8)^2+(y+1)^2=25$ tem centro no ponto de coordenadas $(8,-1)$ e como a reta $t$ passa neste ponto, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
& y-(-1)=\frac{3}{2}(x-8) \\
\Leftrightarrow\ & y+1=\frac{3}{2}x-12 \\
\Leftrightarrow\ & y=\frac{3}{2}x-13
\end{aligned}
$$

A equação reduzida da reta $t$ é $y=\frac{3}{2}x-13$.

Resposta: **(A)**

**4.** Determinemos $w_3$.

$$w_2=\frac{2}{w_1}-1 \Leftrightarrow w_2=\frac{2}{5}-1 \Leftrightarrow w_2=-\frac{3}{5}$$

$$w_3=\frac{2}{-\frac{3}{5}}-1 \Leftrightarrow w_3=-\frac{10}{3}-1 \Leftrightarrow w_3=-\frac{13}{3}$$

Por outro lado, $t_n=w_3$, pelo que:

$$
\begin{aligned}
\frac{10-7n}{n+2}=-\frac{13}{3} &\Leftrightarrow 3(10-7n)=-13(n+2), \text{pois } n\neq -2 \\
&\Leftrightarrow 30-21n=-13n-26 \\
&\Leftrightarrow -21n+13n=-26-30 \\
&\Leftrightarrow -8n=-56 \\
&\Leftrightarrow n=7
\end{aligned}
$$

Resposta: $n=7$

**5.**

**5.1.** A reta $s$ é perpendicular ao plano $\theta$, pelo que os vetores diretores da reta $s$ são colineares com os vetores normais do plano $\theta$.

Ora, $\vec{n}_\theta = (2,-1,3)$.

Vamos identificar, em cada uma das opções, as retas cujo vetor diretor seja colinear a $\vec{n}_\theta$.

**(A)**

$$\begin{aligned} & (2,-1,3) = k(-2,-1,3) \\ \Leftrightarrow\ & 2 = -2k \wedge -1 = -k \wedge 3 = 3k \\ \Leftrightarrow\ & k = -1 \wedge k = 1 \wedge k = 1, \text{ impossível, a reta não é perpendicular a } \theta \end{aligned}$$

**(B)**

$$\begin{aligned} & (2,-1,3) = k(-2,1,-3) \\ \Leftrightarrow\ & 2 = -2k \wedge -1 = k \wedge 3 = -3k \\ \Leftrightarrow\ & k = -1 \wedge k = -1 \wedge k = -1, \text{ logo a reta é perpendicular a } \theta \end{aligned}$$

**(C)**

$$\begin{aligned} & (2,-1,3) = k(3,0,2) \\ \Leftrightarrow\ & 2 = 3k \wedge -1 = 0 \wedge 3 = 2k, \text{ impossível a reta não é perpendicular a } \theta \end{aligned}$$

**(D)**

$$\begin{aligned} & (2,-1,3) = k(2,-1,3) \\ \Leftrightarrow\ & 2 = 2k \wedge -1 = -k \wedge 3 = 3k \\ \Leftrightarrow\ & k = 1 \wedge k = 1 \wedge k = 1, \text{ logo a reta é perpendicular a } \theta \end{aligned}$$

Assim, temos que apenas as retas cujas equações são apresentadas nas opções **(B)** e **(D)** são perpendiculares ao plano $\theta$, pelo que resta verificar a qual das retas pertence o ponto $P$.

Substituindo, as suas coordenadas em cada uma das equações:

**(B)** $(-3,4,-2) = (-1,3,1) + \lambda(-2,1,-3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -1 - 2\lambda \\ 4 = 3 + \lambda \\ -2 = 1 - 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

Logo, o ponto $P$ pertence à reta.

**(C)** $(-3,4,-2) = (-5,5,-1) + \lambda(2,-1,3) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -5 + 2\lambda \\ 4 = 5 - \lambda \\ -2 = -1 + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Impossível, logo o ponto $P$ não pertence à reta.

Resposta: **(B)**

**5.2.** A reta $s$ é perpendicular ao plano $\theta$ e passa pelo ponto $P$. Esta reta pode ser definida pela equação $(x,y,z)=(-1,3,1)+\lambda(-2,1,-3),\ \lambda\in\mathbb{R}$, como vimos na alínea anterior. Seja $I=s\cap\theta$, determinemos as coordenadas do ponto $I$.

$$\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-3\lambda \\ 2x-y+3z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-3\lambda \\ 2(-1-2\lambda)-(3+\lambda)+3(1-3\lambda)-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-3\lambda \\ -2-4\lambda-3-\lambda+3-9\lambda-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=1-3\lambda \\ -14\lambda=14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2(-1) \\ y=3+(-1) \\ z=1-3(-1) \\ \lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=4 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Portanto, $I(1,2,4)$.
A distância do ponto $P$ ao plano $\theta$ é igual a $\overline{IP}$.
Assim,

$$\begin{aligned} \overline{IP} &= \sqrt{(1+3)^2+(2-4)^2+(4+2)^2} \\ &= \sqrt{16+4+36} \\ &= \sqrt{56} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

Resposta: $2\sqrt{14}$

**5.3.** Os planos $\theta$ e $\beta$ são perpendiculares, pelo qu $\vec{n}_\theta\perp\vec{n}_\beta$, ou seja $\vec{n}_\theta\cdot\vec{n}_\beta=0$.
Como $\vec{n}_\theta(2,-1,3)$ e $\vec{n}_\beta(4,-k,2-k)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} & (2,-1,3)\cdot(4,-k,2-k)=0 \\ \Leftrightarrow\ & 8+k+6-3k=0 \\ \Leftrightarrow\ & -2k=-14 \\ \Leftrightarrow\ & k=7 \end{aligned}$$

Resposta: **(D)**

**6.** Como o quociente de termos consecutivos de uma progressão geométrica é constante e igual à razão, $r$, temos que.

$$
\begin{aligned}
& \frac{9k}{k+8}=\frac{k+8}{k} \\
\Leftrightarrow\ & (9k)(k)=(k+8)(k+8) \\
\Leftrightarrow\ & 9k^2=k^2+16k+64 \\
\Leftrightarrow\ & 8k^2-16k-64=0 \\
\Leftrightarrow\ & k^2-2k-8=0 \\
\Leftrightarrow\ & k=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & k=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & k=\frac{2-6}{2}\vee k=\frac{2+6}{2} \\
\Leftrightarrow\ & k=-2\vee k=4
\end{aligned}
$$

Se $k=-2$, os três termos seriam $-2, 6$ e $-18$, pelo que a progressão não seria monótona. Se $k=4$, os três termos seriam $4, 12$ e $36$.

Resposta: $4, 12$ e $36$.

**7.**

**7.1.** $(a_n)$ é uma progressão aritmética e $a_7=-32$ e $a_6=\frac{9}{4}a_3$, pelo que:

$$
\begin{aligned}
a_6=\frac{9}{4}a_3 \Leftrightarrow\ & a_7-r=\frac{9}{4}(a_7-4r) \\
\Leftrightarrow\ & -32-r=\frac{9}{4}(-32-4r) \\
\Leftrightarrow\ & -32-r=-72-9r \\
\Leftrightarrow\ & -r+9r=-72+32 \\
\Leftrightarrow\ & 8r=-40 \\
\Leftrightarrow\ & r=-5
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$a_7=-32 \Leftrightarrow a_1+6r=-32 \Leftrightarrow a_1+6(-5)=-32 \Leftrightarrow a_1=-2$$

Assim, tem-se que:

$$a_n=a_1+(n-1)r \Leftrightarrow a_n=-2+(n-1)(-5) \Leftrightarrow a_n=-2-5n+5 \Leftrightarrow a_n=-5n+3$$

Resposta: $a_n=-5n+3$

**7.2.** Pretende-se determinar a soma dos 12 termos consecutivos de $(a_n)$ a partir do 4º termo, inclusive, ou seja:

$$a_4 + a_5 + \cdots + a_{15} = \frac{a_4 + a_{15}}{2} \times 12$$

Ora, $a_4 = -5(4) + 3 \Leftrightarrow a_4 = -17$ e $a_{15} = -5(15) + 3 = -72$

Portanto,

$$\frac{a_4 + a_{15}}{2} \times 12 = \frac{-17 - 72}{2} \times 12 = -534$$

Resposta: $-534$

**8.**

- $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2-(n+1)}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2-n}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2-n-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2-n}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{1-n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2-n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1-n-(2-n)} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1-n-2+n} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$$

  Portanto, $(b_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{4}{3}$.

- $$a_{n+1} - a_n = \left[\frac{2-3(n+1)}{4} - (n+1)\right] - \left[\frac{2-3n}{4} - n\right] = \frac{2-3n-3}{4} - n - 1 - \frac{2-3n}{4} + n =$$

  $$= \frac{-3n-1}{4} - 1 - \frac{2-3n}{4} = \frac{-3n-1-4-2+3n}{4} = -\frac{7}{4}$$

  Portanto, $(a_n)$ é uma progressão aritmética de razão $-\frac{7}{4}$.

Assim, a afirmação I é verdadeira e a afirmação II é falsa.

Resposta: **(A)**

**9.**

**9.1.** O ponto $A$ tem coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

O ponto $B$ tem coordenadas $(1, \sin\alpha)$, pois $[BC]$ é paralelo ao eixo $Oy$.

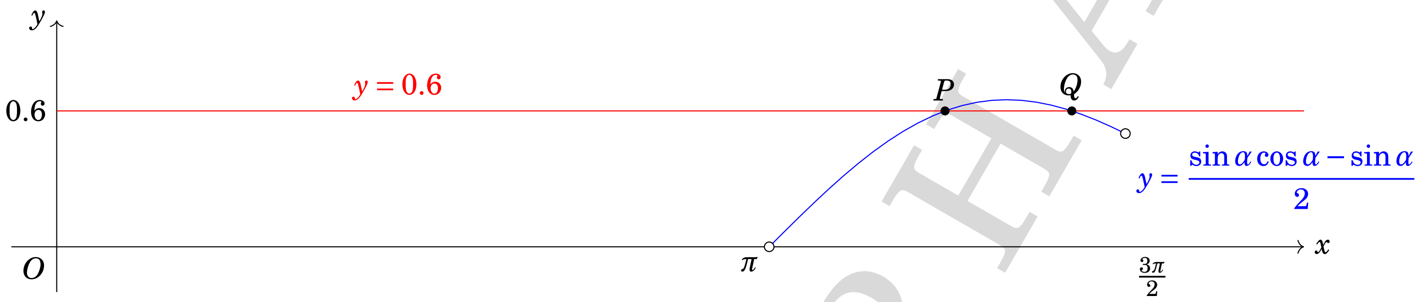
Então, $\overline{AB} = -x_A + x_B = -\cos\alpha + 1$ e altura, $h$, do triângulo $[ABO]$ é $-y_A = -\sin\alpha$.

Assim, tem-se que:

$$\text{Área}_{\Delta[ABO]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{(-\cos\alpha + 1)(-\sin\alpha)}{2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2} \text{ (c.q.m)}$$

**9.2.** O problema pode ser traduzido pela condição

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{2} > 0.6 \wedge \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$




Logo, $P(3{,}917;1{,}200)$ e $Q(4{,}476;1{,}200)$.
Resposta: $\alpha \in ]3{,}92;4{,}48[$.

**10.** Tem-se que: $d_4 = 8d_7$ e $r = 32d_9$, sendo $r$ a razão.
Ora,

$$d_4 = 8d_7 \Leftrightarrow d_4 = 8(d_4 \times r^3) \Leftrightarrow 1 = 8r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

Logo, $r = 32d_9 \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 32d_9 \Leftrightarrow d_9 = \frac{1}{64}$.
Daqui resulta que

$$d_9 = d_1 \times r^8 \Leftrightarrow \frac{1}{64} = d_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Leftrightarrow d_1 = \frac{\frac{1}{64}}{\left(\frac{1}{2}\right)^8} = 4$$

Portanto, a soma $S$, dos cinco primeiros termos desta progressão é dada por:

$$\begin{aligned} & S = d_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} \\ \Leftrightarrow\ & S = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow\ & S = \frac{31}{4} \end{aligned}$$

Resposta: $\frac{31}{4}$

**FIM**