PLANO α

12º ANO | FICHA 19 | 2022

António Leite

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

1.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \geq (0,125)^{3x}$

1.2. $e^{-x} + 2 = 3e^{x}$

1.3. $2e^{2x} - 2e^{x} = \frac{3}{2}$

1.4. $2\log_3 2 - \log_3(4x-1) = -\log_3(x^2-1)$

1.5. $\log_{10}(3-x)^2 - \log_{10}(x-2) < \log_{10}(x+1)$

1.6. $e^{x} + e^{x+1} \leq 2$

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por $f(x) = 1 + e^{\frac{3}{x-2}}$.

2.1. Determine o contradomínio da função f.
Apresente o resultado usando a notação de intervalos de números reais.

2.2. Qual dos seguintes é o zero de f^{-1}, função inversa de f?

(A) $1 + e^{\frac{3}{2}}$ **(B)** $1 + e^{-\frac{2}{3}}$ **(C)** $\frac{e^2+\sqrt{e}}{e^2}$ **(D)** $\frac{1+e}{\sqrt{e^3}}$

3. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = e^{x} - e^{-x}$.
Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $h(x) = 4$.
Apresente a(s) solução(ões) na forma $\ln(k)$, com $k \in \mathbb{R}^{+}$.

4. Seja j a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $j(x) = 1 + \frac{\cos(3x)}{\cos x}$.

4.1. Prove que $j(x) = 2\cos(2x)$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

4.2. Determine os zeros de j.

5. Seja m a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$m(x) = \begin{cases} 3 + x^2 e^{x+3} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{2x + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.1. Averigue, sem recorrer à calculadora, se a função m é contínua em $x = 0$.

5.2. O gráfico da função m tem uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

FIM

Soluções

1.

1.1. $x \in [0,9]$

1.2. $x = 0$

1.3. $x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

1.4. $x = \dfrac{3}{2}$

1.5. $\left]\dfrac{11}{5}, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

1.6. $\left]-\infty, \ln\left(\dfrac{2}{1+e}\right)\right]$

2.

2.1. $D'_f =]1,2[\cup]2,+\infty[$

2.2. **(C)**

3. $x = \ln(2 + \sqrt{5})$

4.

4.2. $x = -\dfrac{\pi}{4} \vee x = \dfrac{\pi}{4}$

5.

5.1. É contínua em $x = 0$

5.2. $y = 3$