Prova Modelo Exame Final de Matemática A

Prova 2 | Ensino Secundário | 2022

12.º Ano de Escolaridade

António Leite

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância 30 minutos. | 6 Páginas.

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado a cor vermelha, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

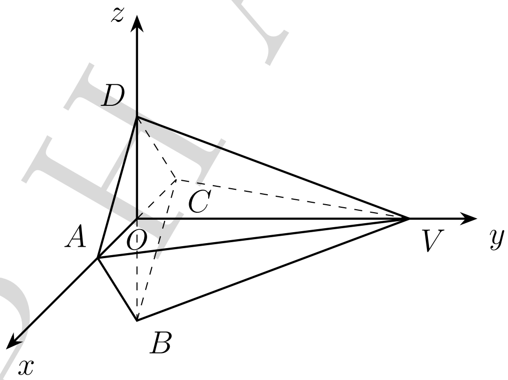
O formulário pode ser visto *aqui*.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Na figura está representada a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.
Sabe-se, fixado, um referencial ortonormado do espaço que:



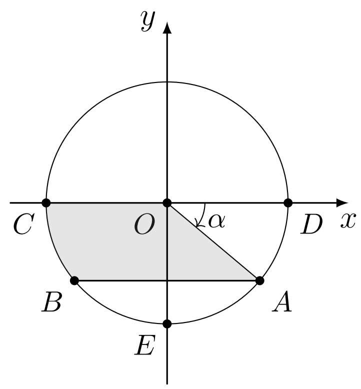
- o ponto O coincide com a origem do referencial;
- os vértices A e C pertencem ao eixo Ox;
- o vértice V pertence ao eixo Oy;
- os vértices B e D pertencem ao eixo Oz;
- a base da pirâmide tem lado 2;
- o centro da base da pirâmide coincide com a origem do referencial;
- $\overline{DV} = \sqrt{38}$.

1.1. Qual das equações seguintes é uma equação do plano ADV?

(A) $3\sqrt{2}x + y + 3\sqrt{2}z = 0$
(B) $6x + \sqrt{2}y + 6z - 6\sqrt{2} = 0$
(C) $3\sqrt{2}x + y + 3\sqrt{2}z + 6 = 0$
(D) $6x + \sqrt{2}y + 6z - 6 = 0$

1.2. Seja P um ponto tal que $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OV}$, com $k \in \mathbb{R}^-$.
Determine as coordenadas do ponto P sabendo que a área do triângulo $[DPV]$ é igual a $\sqrt{32}$.

2. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio $\sqrt{2}$.
Sabe-se que:



- os pontos C e D pertencem ao eixo Ox;
- $[CD]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto E pertence ao semieixo negativo Oy e à circunferência;
- o ponto A desloca-se ao longo do arco DE, nunca coincidindo com o ponto D, nem com o ponto E;
- para cada posição do ponto A, considere a região sombreada, onde a corda $[AB]$ é sempre paralela ao diâmetro $[CD]$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOA $\left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\right)$.

Admita que, para uma certa posição do ponto A, se tem:

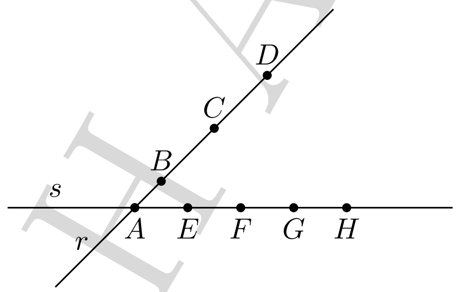
$$-\cos(-\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

Determine, para essa posição do ponto A, o valor exato da área da região sombreada.

3. Na figura estão representadas duas retas, concorrentes não perpendiculares, r e s.

Sabe-se que:

- as retas r e s intersetam-se no ponto A;
- os pontos B, C e D pertencem à reta r;
- os pontos E, F, G e H pertencem à reta s.



Determine o número de triângulos que é possível definir com os pontos assinalados nas duas retas.

4. Na figura ao lado estão representados oito cartões, em cada um deles encontra-se escrita uma expressão do termo geral de uma sucessão.

$\ln\left(\frac{1}{n}\right)$	$2-n$	e^{3-n}
$\frac{3}{n-4}$	$\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$	$\frac{n^2+2}{1-n}$
$(-1)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	

Escolhe-se, ao acaso, um destes oito cartões e observa-se a expressão do termo geral da sucessão nele inscrita.

Considere os seguintes acontecimentos associados a esta experiência aleatória:

A: "A sucessão é divergente".
B: "O limite da sucessão é igual a $-\infty$".

Qual é o valor da probablidade condicionada $P(B|A)$?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{2}{5}$ **(D)** $\frac{3}{5}$

5. Uma associação de voluntários é constituída por 17 portugueses, 13 angolanos, 12 italianos e 8 suecos.

O Gustavsson é sueco e é, também, o voluntário mais velho desta associação.

Vão ser escolhidos, ao acaso, 8 voluntários desta associação para realizarem trabalho humanitário numa instituição de saúde.

Determine a probabilidade de o grupo constítuido por estes 8 voluntários ser formado pelo Gustavsson, exatamente por três suecos e por pelo menos dois angolanos.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5, tais que, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 30 + 15i$.

Sabe-se, ainda, que z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5 são cinco termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Qual é o módulo do inverso de z_3?

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **(B)** $\frac{\sqrt{5}}{15}$ **(C)** $\sqrt{5}$ **(D)** $3\sqrt{5}$

7. Seja (u_n) uma progressão geométrica.

Sabe-se que $u_2 = 2$ e $u_5 = \dfrac{2}{27}$.

Considere S_n a soma dos n primeiros termos de (u_n).

Determine, sem recorrer à calculadora, o menor número natural n tal que $|S_n - 9| < 10^{-4}$.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sin a + \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + a\right) + bi$, com $a \in [0, 2\pi[$ e $b \in \mathbb{R}$ e $z_2 = \dfrac{(2-i)^2 + \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{1 - 2i^9} + 3i^{31}$.

Determine os números reais a e b tais que $z_1 = \dfrac{z_2}{2}$.

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = -4e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ e $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos z que são solução da equação $|z|z^2 = \left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^3$.

Apresente esses números na forma algébrica.

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-4} & \text{se } x \leq 4 \\ \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\ln(x-3)} + k & \text{se } x > 4 \end{cases} \quad (k \text{ é um número real})$$

Resolva os itens **10.1** e **10.2** sem recorrer à calculadora.

10.1. Determine k, sabendo que a função f é contínua em $x = 4$.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

10.2. Estude, no intervalo $[-10, 4[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.
Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

11. Seja h a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, cuja primeira derivada, h', de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, é dada por $h'(x) = \sin^2(x) - x\cos(x)$.

Mostre, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que a segunda derivada da função h admite pelo menos um zero no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

12. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função de domínio $\left]-\infty, -\frac{1}{e}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$, definida por $g(x) = x\ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$.

Estude a função g quanto à existência de assíntota(s) vertical(is) ao seu gráfico e, caso esta(s) exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

13. Quando uma substância radioativa se desintegra, a sua massa, medida em gramas, varia de acordo com uma função do tipo $m(t) = m_0 e^{-kt}$ $(t \geq 0)$, em que, a variável t designa o tempo, medido em milénios decorridos desde um certo instante incial. A constante real k depende da substância e a constante real m_0 é a massa da substância no referido instante incial.

13.1. Ao fim de quanto tempo, em função de k, se reduz a metade a massa inicial de uma substância radioativa?

(A) $k\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ **(B)** $k\ln(2)$ **(C)** $\frac{k}{2}$ **(D)** $\frac{\ln(2)}{k}$

13.2. Considere, para uma certa substância radioativa, que $m_0 = 500$ gramas e $k = 0,03$.

Num certo instante t_1, havia mais 20 gramas dessa substância radioativa do que dois milénios depois desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1, sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em milénios, arredondado às centésimas.

Não justifique a validade dos resultados obtidos na calculadora.

Na sua resposta:

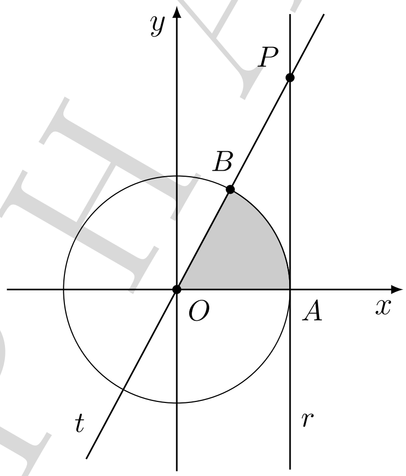
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondado(s) às milésimas.

14. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x)} \geq \frac{1}{81}$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou reunião de intervalos disjuntos de números reais.

15. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica. Sabe-se que:



- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto B pertence à reta t e à circunferência;
- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- a reta t passa pelos pontos O, origem do referencial, e P;
- o ponto P pertence à reta r;
- A área do setor circular AOB é igual a $\frac{5\pi}{24}$ unidades de área.

Mostre que a ordenada do ponto P é $2+\sqrt{3}$.

FIM

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1**	**1.2**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação	**2.**	**5.**	**7.**	**11.**	**12.**	**14.**							**Subtotal**
Cotação em pontos	3×14												**42**
TOTAL													**200**