PLANO α

12º ANO | TESTE 1 | 2022

António Leite

---

1. Considere os conjuntos A e B de um universo U.

Prove que $\left[A \cup \left(\overline{B} \cap \overline{A}\right)\right] \cap \left(\overline{A \setminus \overline{B}}\right) = \overline{B}$.

2. Quantos números ímpares de sete algarismos se podem escrever, utilizando os algarismos do número 1233355?

3. Considere a seguinte expressão $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2}\right)^8$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Um dos termos do desenvolvimento desta expressão é um monómio da forma kx^{-2}, sendo k um número real.

Determine o valor de k.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

4. Considere, fixado um referencial ortonormado do plano, os pontos $A(-3,6)$ e $B(1,4)$ e os vetores $\vec{u}(2a+1,-6)$ e $\vec{t}(3,b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

4.1. Determine a equação reduzida da circunferência de diâmetro $[AB]$.

4.2. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$ são perpendiculares.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $2a+2b=-1$ **(B)** $2a-2b=1$ **(C)** $a=b-\frac{1}{2}$ **(D)** $b=a-\frac{1}{2}$

5. Uma turma de uma escola secundária tem 14 alunos, dos quais três são raparigas.

Habitualmente, apenas cinco alunos da turma realizam os trabalhos de casa.

5.1. O professor de Matemática A desta turma pretende formar uma comissão de cinco alunos.
Quantas comissões diferentes, que incluam pelo menos dois alunos que não realizam habitualmente os trabalhos de casa, pode este professor formar?

5.2. Os alunos desta turma vão dispor-se, lado a lado, em linha reta, para tirar uma fotografia.
Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes em que se podem dispor, de modo que não fiquem duas raparigas juntas.

6. A soma dos seis menores elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a 134.

Determine o maior elemento da linha seguinte.

7. Num saco existem 12 bolas indistinguíveis ao tato, das quais cinco são azuis e numeradas de 1 a 5, quatro são verdes e numeradas de 6 a 9 e três são vermelhas e numeradas de 10 a 12.

Pretende-se extrair, uma a uma, sem reposição, todas as bolas do saco e colocá-las em cima de uma mesa, lado a lado, em linha reta, pela ordem de saída.

De quantas maneiras diferentes é possível colocar as bolas, de modo que as bolas vermelhas fiquem todas juntas, assim como as bolas azuis?

(A) $3! \times 5! \times 4! \times 3!$

(B) $3! \times 5! \times 6!$

(C) $4! \times 9 \times 8!$

(D) $12! - 3! \times 5!$

8. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes.

Destes números, quantos são:

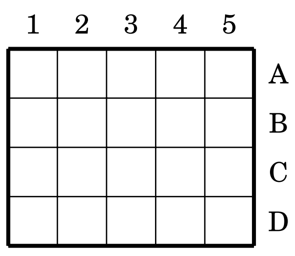
8.1. pares?

8.2. superiores a 45130?

9. Resolva, em $\mathbb{N}$, a seguinte equação: ${}^{2n}C_2 + {}^{8}A'_2 = {}^{3n}A_2 - 3 \times 5! - {}^{8}C_7$.

10. Na figura ao lado está representado um tabuleiro dividido em 20 quadrados iguais, dispostos em quatro filas horizontais (A, B, C e D) e em cinco filas verticais ($1, 2, 3, 4$ e 5).

O António tem 14 latas de bebidas, a saber: oito de coca cola, três de seven up, duas de fanta e uma de icea tea.
As latas da mesma bebida são iguais entre si.
Pretende colocar no tabuleiro todas as latas, não mais do que uma em cada quadrado.



Determine o número de maneiras diferentes que pode o António colocar as 14 latas no tabuleiro, se as de coca cola ocuparem lugares em quadrados de duas filas horizontais e que nessas duas filas não fica a lata de ice tea.

FIM