PLANO α

12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO MINITESTE 3 | 2023

António Leite

1.

1.1. Em $-\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2-5x+6}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3-5x^2+6x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-4}{x^2-5x+6}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4-x^3+5x^2-6x}{x^2-5x+6}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2-6x-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{x^2} = 5$$

A reta de equação $y = x+5$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, em $-\infty$.

Em $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+8}}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+8}}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}{x(x-1)} = \frac{\sqrt{1+0}}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+8}}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{8}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = 1$$

A reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, em $+\infty$.

1.2. A função f é contínua em $]-\infty,1[$, pois é definida por uma função racional, contínua neste intervalo.

A função f é contínua em $]1,+\infty[$, pois é o quociente de duas funções contínuas (uma irracional e uma afim), ambas contínuas neste intervalo.

O ponto de abcissa 1 é um possível ponto de descontinuidade.

Assim, vem que:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-4}{x^2-5x+6} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2+8}}{x-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Portanto, a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical (unilateral) ao gráfico de f.

2.

2.1. Temos que: $g(-2) = \frac{-4-3}{-2+1} = \frac{-7}{-1} = 7$

Ora,

$$\begin{aligned} g'(-2) &= \lim_{x\to -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{\frac{2x-3}{x+1}-7}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{\frac{2x-3-7x-7}{x+1}}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2} \frac{-5x-10}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{-5(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{-5}{x+1} = \frac{-5}{-2+1} = 5 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & y-g(-2) = g'(-2)(x+2) \\ \Leftrightarrow\ & y-7 = 5(x+2) \\ \Leftrightarrow\ & y = 5x+10+7 \\ \Leftrightarrow\ & y = 5x+17 \end{aligned}$$

Logo, a equação pedida é $y = 5x+17$.

3.

Ora, $y=-2x+5$ é a equação da assíntota ao gráfico da função f, em $+\infty$, portanto:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \qquad \lim_{x\to +\infty} [f(x)+2x] = 5$$

Determinemos, agora, a equação da assíntota oblíqua ao gráfico da função g.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+x}{f(x)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{xf(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x+1)}{xf(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{f(x)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x+1}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \frac{1}{-2 \times \left(\frac{1}{1+0}\right)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[g(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+x}{f(x)} + \frac{x}{2}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+2x+xf(x)}{2f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2x+2+f(x)\right)}{2f(x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2f(x)} \times \lim_{x\to+\infty} [2x+2+f(x)]$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} \times \left[\lim_{x\to+\infty} (f(x)+2x) + \lim_{x\to+\infty} (2)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} \times (5+2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{-2} \times 7 = -\frac{7}{4}$$

Portanto, $m = -\frac{1}{2}$ e $b = -\frac{7}{4}$, pelo que, a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g.

4.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^3)'(x^2-1)-(x^3)(x^2-1)'}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2(x^2-1)-(x^3)(2x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^4-3x^2-2x^4}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Determinação dos zeros de f':

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \wedge \left(x^2-1\right)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}) \wedge (x \neq -1 \wedge x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	0	$-$	$n.d.$	$-$	$+$	$+$
Variação de f	$\nearrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$

Intervalos de monotonia:

- f é estritamente crescente em $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right]$ e em $\left[\sqrt{3}, +\infty\right[$;
- f é estritamente decrescente em $\left[-\sqrt{3}, -1\right[$ e em $\left]-1, 0\right]$ e em $\left[0, 1\right[$ e em $\left]1, \sqrt{3}\right]$.

Extremos:

- $f(-\sqrt{3}) = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2 - 1} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{3-1} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ é máximo relativo
- $f(\sqrt{3}) = \dfrac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3-1} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ é mínimo relativo

Soma pedida: $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

5. Resposta: **(B)**

FIM