11º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO MINITESTE 4 | 2023

António Leite

1.

Temos que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA}$, portanto,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{FA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA}) \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA}
\end{aligned}
$$

Como $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{BE} \perp \overrightarrow{FD}$, então $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ e $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FD} = 0$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA} \\
= \ & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FD} + 0 + 0 + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{DA} \\
= \ & \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{FD}\| \times \cos(180°) + \|\overrightarrow{BE}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| \times \cos(180°)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que $\overline{AB} = 3 \times \overline{BC}$, isto é, $\|\overrightarrow{AB}\| = 3 \times \|\overrightarrow{BC}\|$,

logo, $\|\overrightarrow{FD}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\|}{2} = \dfrac{3 \times \|\overrightarrow{BC}\|}{2}$.

Temos, ainda, que $\|\overrightarrow{BE}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{BC}\|}{2}$ e $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

Então,

$$
\begin{aligned}
& \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{FD}\| \times \cos(180°) + \|\overrightarrow{BE}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| \times \cos(180°) \\
= \ & 3 \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \frac{3 \times \|\overrightarrow{BC}\|}{2} \times (-1) + \frac{\|\overrightarrow{BC}\|}{2} \times \|\overrightarrow{BC}\| \times (-1) \\
= \ & -\frac{9}{2} \times \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \frac{1}{2} \times \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\
= \ & -\frac{10}{2} \times \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\
= \ & -5 \times \|\overrightarrow{BC}\|^2 \\
= \ & -5 \times \overline{BC}^2 \qquad (c.q.m.)
\end{aligned}
$$

2.

Ora,

$$\begin{aligned}\|\vec{v}-2\vec{u}\|^2 &= (\vec{v}-2\vec{u})\cdot(\vec{v}-2\vec{u})\\ &= \vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{u}\cdot\vec{u}\\ &= \|\vec{v}\|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\times\|\vec{u}\|^2\\ &= \|\vec{v}\|^2-4\times\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}\,\hat{;}\,\vec{v})+4\times\|\vec{u}\|^2\\ &= 4^2-4\times2\times4\times\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+4\times2^2\\ &= 16-32\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+16\\ &= 32+16\sqrt{3}\end{aligned}$$

3.

Vamos determinar uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. Seja r essa reta.

Um vetor normal ao plano α, $\vec{n}_\alpha$, é paralelo a um vetor diretor da reta r.

Ora, como $\vec{n}_\alpha=(3,-2,1)$, por exemplo, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y,z)=(1,-2,3)+k(3,-2,1),\ k\in\mathbb{R}$$

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α.

Seja I esse ponto.

$$\begin{cases}x=1+3k\\ y=-2-2k\\ z=3+k\\ 3x-2y+z+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3k\\ y=-2-2k\\ z=3+k\\ 3(1+3k)-2(-2-2k)+3+k+4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3k\\ y=-2-2k\\ z=3+k\\ 3+9k+4+4k+3+k+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3k\\ y=-2-2k\\ z=3+k\\ 14k+14=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+3(-1)\\ y=-2-2(-1)\\ z=3+(-1)\\ k=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=0\\ z=2\\ k=-1\end{cases}$$

Portanto, $I(-2,0,2)$.

A distância do ponto A ao plano α é igual a $\overline{AI}$.

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
\overline{AI} = &\ \sqrt{(1+2)^2+(-2-0)^2+(3-2)^2}\\
&\ \sqrt{9+4+1}\\
&\ \sqrt{14}
\end{aligned}
$$

Resposta: $\sqrt{14}$.

4.

Para determinar uma equação cartesiana do plano ABC, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, deste plano.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,3,1)-(0,-1,2) = (-2,4,-1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (12,2,-1)-(0,-1,2) = (12,3,-3)$

Sendo, $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano ABC, temos que:

$$
\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-2,4,-1)=0\\ (a,b,c)\cdot(12,3,-3)=0\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases}-2a+4b-c=0\\ 12a+3b-3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a+4b=c\\ 12a+3b-3(-2a+4b)=0\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases}-2a+4b=c\\ 12a+3b+6a-12b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a+4b=c\\ 18a-9b=0\end{cases}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases}-2a+4b=c\\ 9b=18a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a+4(2a)=c\\ b=2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a+8a=c\\ b=2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=6a\\ b=2a\end{cases}
$$

A família dos vetores normais do plano ABC é $\vec{n}(a,2a,6a),\ a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Por exemplo, se $a=1$, $\vec{n}(1,2,6)$ é um vetor normal ao plano ABC e como $A(0,-1,2)$ pertence a este plano, temos que uma equação cartesiana do plano é:

$$
\begin{aligned}
&\ 1(x-0)+2(y+1)+6(z-2)=0\\
\Leftrightarrow &\ x+2y+2+6z-12=0\\
\Leftrightarrow &\ x+2y+6z-10=0
\end{aligned}
$$

5.

5.1.

O ângulo BAH é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AH}$.
Ora, $\overrightarrow{AB} = B - A = (-3,8,-2) - (1,2,-2) = (-4,6,0)$
e $\overrightarrow{AH} = H - A = (0,10,13) - (1,2,-2) = (-1,8,15)$

Temos ainda que:
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

$\|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-1)^2 + 8^2 + 15^2} = \sqrt{1+64+225} = \sqrt{290}$

A amplitude do ângulo BAH pode ser determinada do modo que se segue:

$$\cos(B\hat{A}H) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|}$$

$$= \frac{(-4,6,0)\cdot(-1,8,15)}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|}$$

$$= \frac{4+48}{\sqrt{52} \times \sqrt{290}} = \frac{52}{\sqrt{15080}}$$

Logo, a amplitude do ângulo BAH, em graus, arredondada às décimas é

$$B\hat{A}H = \cos^{-1}\left(\frac{52}{\sqrt{15080}}\right) \approx 65°$$

5.2.

As coordenadas do ponto E podem obter-se a partir de $E = A + \overrightarrow{BH}$.
Ora, $\overrightarrow{BH} = H - B = (0,10,13) - (-3,8,-2) = (3,2,15)$, pelo que

$E = (1,2,-2) + (3,2,15) = (4,4,13)$.

O raio da superfície esférica é igual a

$\overline{AE} = \sqrt{(4-1)^2 + (4-2)^2 + (13+2)^2} = \sqrt{9+4+225} = \sqrt{238}$

Portanto, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto E e que passa no ponto A é $(x-4)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^3 = 238$.

5.3. Seja $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento de reta $[AH]$ e M o ponto médio deste segmento.

Ora, $M\left(\frac{1+0}{2},\frac{2+10}{2},\frac{-2+13}{2}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{2},6,\frac{11}{2}\right)$.

Uma equação do plano mediador pedido é, então, $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{AH}=0$.

Determinemos as coordenadas destes vetores:

$$\overrightarrow{MP}=P-M=(x,y,z)-\left(\frac{1}{2},6,\frac{11}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2},y-6,z-\frac{11}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AH}=H-A=(0,10,13)-(1,2,-2)=(-1,8,15)$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
&\left(x-\frac{1}{2},y-6,z-\frac{11}{2}\right)\cdot(-1,8,15)=0\\
\Leftrightarrow\ & -1\left(x-\frac{1}{2}\right)+8(y-6)+15\left(z-\frac{11}{2}\right)=0\\
\Leftrightarrow\ & -x+\frac{1}{2}+8y-48+15z-\frac{165}{2}=0\\
\Leftrightarrow\ & -x+8y+15z-130=0
\end{aligned}$$

Uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AH]$ é $-x+8y+15z-130=0$.

FIM