12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO MINITESTE 4 | 2023

António Leite

1.

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa, e os acontecimentos:

H: "O funcionário é homem"

E: "O funcionário tem excesso de peso"

Temos que: $P(H) = 0,4$ e $P(E|H) = 0,35$.

Pretende-se determinar $P(\overline{E} \cup \overline{H})$.

Ora, $P(E|H) = 0,35 \Leftrightarrow \dfrac{P(E \cap H)}{P(H)} = 0,35 \Leftrightarrow P(E \cap H) = 0,35 \times 0,4 \Leftrightarrow P(E \cap H) = 0,14$.

Por outro lado, temos que $P(\overline{E} \cup \overline{H}) = P(\overline{E \cap H}) = 1 - P(E \cap H) = 1 - 0,14 = 0,86 = \dfrac{43}{50}$.

Resposta: $\dfrac{43}{50}$

2.

2.1.

$$
\begin{aligned}
& \sin x - \cos x = -1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
\Leftrightarrow\ & x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

2.2.

$$
\begin{aligned}
& 5\cos x - \cos(2x) = 3 \\
\Leftrightarrow\ & 5\cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 3 \\
\Leftrightarrow\ & 5\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = 3 \\
\Leftrightarrow\ & 5\cos x - \cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 3 \\
\Leftrightarrow\ & -2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(-2)(-2)}}{-4} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{-5+3}{-4} \vee \cos x = \frac{-5-3}{-4} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \vee \cos x = 2
\end{aligned}
$$

A equação $\cos x = 2$ é uma equação impossível, pois $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$.
Logo,

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x \\
&= \cos^3 x - \sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x\cos x \\
&= \cos^3 x - (1 - \cos^2 x)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\
&= \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x \quad (c.q.m)
\end{aligned}
$$

4.

Determinemos uma expressão de $u_{n+1} - u_n$.

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{6(n+1)-3}{(n+1)+1} - \frac{6n-3}{n+1} = \frac{6n+3}{n+2} - \frac{6n-3}{n+1} \\
&= \frac{(6n+3)(n+1) - (6n-3)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{6n^2 + 6n + 3n + 3 - 6n^2 - 12n + 3n + 6}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{9}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}
$$

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)(n+1) > 0$, pelo que, $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{9}{(n+2)(n+1)} > 0$, ou seja,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, portanto, (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

5.

Vamos determinar uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. Seja r essa reta.

Um vetor normal ao plano α, $\vec{n}_\alpha$, é paralelo a um vetor diretor da reta r.

Ora, como $\vec{n}_\alpha = (3,-2,1)$, por exemplo, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y,z) = (1,-2,3) + k(3,-2,1), \ k \in \mathbb{R}$$

Determinemos, agora, as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α.

Seja I esse ponto.

$$\begin{cases} x = 1+3k \\ y = -2-2k \\ z = 3+k \\ 3x-2y+z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+3k \\ y = -2-2k \\ z = 3+k \\ 3(1+3k)-2(-2-2k)+3+k+4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+3k \\ y = -2-2k \\ z = 3+k \\ 3+9k+4+4k+3+k+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+3k \\ y = -2-2k \\ z = 3+k \\ 14k+14=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+3(-1) \\ y = -2-2(-1) \\ z = 3+(-1) \\ k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = 2 \\ k=-1 \end{cases}$$

Portanto, $I(-2,0,2)$.

A distância do ponto A ao plano α é igual a $\overline{AI}$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{AI} = & \sqrt{(1+2)^2+(-2-0)^2+(3-2)^2} \\ & \sqrt{9+4+1} \\ & \sqrt{14} \end{aligned}$$

Resposta: $\sqrt{14}$.

FIM