12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 1 | 2023

António Leite

1.

$$
\begin{aligned}
& \left[A\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\right]\cup\left(\overline{A}\setminus\overline{B}\right) \\
= & \left[(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{A}\right)\right]\cup\left(\overline{A}\cap\overline{\overline{B}}\right) \\
= & \left[(A\cap B)\cup\emptyset\right]\cup\left(\overline{A}\cap B\right) \\
= & (A\cap B)\cup\left(\overline{A}\cap B\right) \\
= & B\cap\left(A\cup\overline{A}\right) \\
= & B\cap U \\
= & B \quad (c.q.p)
\end{aligned}
$$

2.

1º O algarismo das unidades é 2 ou 6 e o dos milhões é 5: $\dfrac{5!}{2!}\times 2=120$.

2º O algarismo das unidades é 4 e o dos milhões é 5: $5!=120$.

3º O algarismo das unidades é 2 e o dos milhões é 6: $\dfrac{5!}{2!2!}=30$.

4º O algarismo das unidades é 4 e o dos milhões é 6: $\dfrac{5!}{2!}=60$.

Total $=120+120+30+60=330$.

Portanto, podem escrever-se 330 números pares de sete algarismos maiores que cinco milhões utilizando os algarismos do número 2344556.

3.

$$
\begin{aligned}
T_{p+1} = & \ {}^{12}C_p\left(\sqrt{x}\right)^{12-p}\left(-\frac{3}{\sqrt{2x}}\right)^p \\
= & \ {}^{12}C_p\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-p}(-3)^p(\sqrt{2x})^{-p} \\
= & \ {}^{12}C_p(-3)^p x^{6-\frac{p}{2}}\left[(2x)^{\frac{1}{2}}\right]^{-p} \\
= & \ {}^{12}C_p(-3)^p x^{6-\frac{p}{2}}2^{-\frac{p}{2}}x^{-\frac{p}{2}} \\
= & \ {}^{12}C_p(-3)^p 2^{-\frac{p}{2}}x^{6-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}} \\
= & \ {}^{12}C_p(-3)^p 2^{-\frac{p}{2}}x^{6-p}
\end{aligned}
$$

Como se pretende o termo independente de x deste desenvolvimento, $6-p=0 \Leftrightarrow p=6$.

Assim, vem que, sendo $p=6$:

$T_7 = {}^{12}C_6 \times (-3)^6 \times 2^{-3} x^0 \Leftrightarrow T_7 = \dfrac{168399}{2}$.

O termo pedido é $\dfrac{168399}{2}$.

4.

A soma do segundo elemento com o penúltimo elemento da linha n é igual a 42, portanto,

$${}^{n}C_1 + {}^{n}C_{n-1} = 42 \Leftrightarrow n+n=42 \Leftrightarrow 2n=42 \Leftrightarrow n=21$$

Trata-se da linha 21 do Triângulo de Pascal.

I. O quarto elemento da linha seguinte é ${}^{22}C_3 = 1540$.
A afirmação I é falsa.

II. O maior elemento da linha anterior é ${}^{20}C_{10} = 184756$.
A afirmação II é verdadeira.

III. A soma dos seis menores elementos da linha 21 é igual a $(1+21+{}^{21}C_2)\times 2 = 464$.
A afirmação III é falsa.

5.

$$\frac{{}^{n+1}C_5}{{}^{n-1}C_3} = \frac{39}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{(n+1)!}{5!(n+1-5)!}}{\dfrac{(n-1)!}{3!(n-1-3)!}} = \frac{39}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{5!\cancel{(n-4)!}} \times \frac{3!\cancel{(n-4)!}}{(n-1)!} = \frac{39}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{5!} \times \frac{3!}{(n-1)!} = \frac{39}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{5\times 4\times \cancel{3!}} \times \frac{\cancel{3!}}{\cancel{(n-1)!}} = \frac{39}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n}{5\times 4} = \frac{39}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2+n}{4} = 39$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-156=0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-156)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n=-13 \vee n=12$$

Ora,

$$
\begin{aligned}
& n+1 \geq 5 \wedge n-1 \geq 3 \wedge n \in \mathbb{N}_0 \\
\Leftrightarrow\ & n \geq 4 \wedge n \geq 4 \wedge n \in \mathbb{N}_0 \\
\Leftrightarrow\ & n \geq 4 \wedge n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

Como $n \geq 4 \wedge n \in \mathbb{N}_0$, então $n = 12$.

6.

6.1. $10! - 2! \times 9 \times 8! = 2903040$

É possível fazer 2903040 sequências diferentes.

6.2. $5! \times 3! \times 4! = 17280$

É possível fazer 17280 sequências diferentes.

6.3. $7! \times {}^{8}A_3 = 1693440$

É possível fazer 1693440 sequências diferentes.

7.

7.1. $2! \times 10 \times 9! = 7257600$

Os alunos podem dispor-se de 7257600 formas diferentes.

7.2.

1º A Ana é a representante da comissão: ${}^{11}C_3 = 165$.

2º A Ana não é a representante da comissão: ${}^{11}C_3 \times 3 = 495$.

Total $= 165 + 495 = 660$.

Podem ser formadas 660 comissões diferentes nas condições do enunciado.

8.

8.1. ${}^{20}C_7 \times {}^{13}C_3 \times {}^{10}C_2 \times {}^{7}A_2 = 41902660800$

É possível fazê-lo de 41902660800 maneiras diferentes.

8.2.

1º Nenhum quadrado é pintado de azul: ${}^{5}C_2 \times {}^{7}C_1 \times {}^{12}C_4 = 34650$.

2º Exatamente um quadrado é pintado de azul: ${}^{5}C_2 \times {}^{12}C_1 \times {}^{7}C_1 \times {}^{11}C_3 = 138600$.

Total $= 34650 + 138600 = 173250$.

É possível fazê-lo de 173250 maneiras diferentes.

9.

9.1.

1º O algarismo das unidades é zero: ${}^9A_3 = 504$.

2º O algarismo das unidades é 2,4,6 ou 8: $8 \times {}^8A_2 \times 4 = 1792$.

Total $= 504 + 1792 = 2296$.

Destes números, 2296 são pares.

9.2.

1º 3120 a 3130: $1 \times 1 \times 1 \times 6 = 6$.

2º 3130 a 3200: $1 \times 1 \times 6 \times 7 = 42$.

3º 3200 a 4000: $1 \times 7 \times {}^8A_2 = 392$.

4º 4000 a 9999: $6 \times {}^9A_3 = 3024$.

Total $= 6 + 42 + 392 + 3024 = 3464$.

Destes números, 3464 são superiores a 3120.

10. Coloca-se uma bola em cada caixa, pelo que restam três bolas.

1º As três bolas restantes ficam na mesma caixa: ${}^4C_1 = 4$.

2º As três bolas restantes ficam em caixas diferentes (uma em cada caixa): ${}^4C_3 = 4$.

3º As três bolas restantes ficam em caixas diferentes (duas numa caixa e uma noutra): ${}^4C_2 \times 2! = 12$.

Total $= 4 + 4 + 12 = 20$.

As bolas podem ficar colocadas nas caixas de 20 maneiras diferentes.

FIM