11º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 1 | 2021

António Leite

1. Ora,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)-\cos(b)}{\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)^2} &= \\
&= \frac{\left(\sqrt{\sin(a)}\right)^2-\left(\sqrt{\cos(b)}\right)^2}{\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\sqrt{\sin(a)}-\sqrt{\cos(b)}\right)\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)}{\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{\sin(a)}-\sqrt{\cos(b)}}{\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}} \\
&= \frac{\tan(30°)\left(\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}\right)}{\sqrt{\sin(a)}+\sqrt{\cos(b)}} \\
&= \tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Resposta: **(A)**

2. Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{\sin(-\pi+\alpha)} = 12 &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{-\sin\alpha} = 12 \\
&\Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{12} \\
&\Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\wedge \sin\alpha < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

$$8\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) - 15\tan(-5\pi-\alpha) = -8\cos\alpha + 15\tan\alpha$$

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} -8\cos\alpha + 15\tan\alpha &= -8\left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + 15\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\ &= 2\sqrt{15} + \sqrt{15} \\ &= 3\sqrt{15} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{2}\sin(6x) = 0 &\Leftrightarrow \sin(6x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow \sin(6x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin(6x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow 6x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 6x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} \vee 6x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.

4.1. Temos que $-\frac{48\pi}{7}\text{rad} = \left(-\frac{42\pi}{7} - \frac{6\pi}{7}\right)\text{rad} = \left(-6\pi - \frac{6\pi}{7}\right)\text{rad}$, ou seja, os ângulos de amplitude $-\frac{48\pi}{7}$rad e $-\frac{6\pi}{7}$rad têm o mesmo lado extremidade.

Como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{GA} = \frac{2\pi}{7}$, então o lado extremidade pedido é $\dot{O}G$.

Resposta: **(D)**

4.2.

$$\begin{aligned}\text{Área}_{\Delta[ABO]} &= \frac{\overline{BO} \times h}{2}\\ &= \frac{r \times x_A}{2}\end{aligned}$$

Seja W o ponto de coordenadas $(1,0)$.

$x_A = \cos(W\hat{O}A)$ e $W\hat{O}A = W\hat{O}B - A\hat{O}B$, ou seja, $W\hat{O}A = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7} = \frac{3\pi}{14}$, pois se $\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi}{7}$, então $A\hat{O}B = \frac{2\pi}{7}$.

Logo

$$\text{Área}_{\Delta[ABO]} = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)}{2} \approx 0,39$$

5.

$$\begin{aligned}
& 2\sin\left(-\frac{7\pi}{2}+\beta\right) - \cos(-101\pi+\beta) + 2\cos(-\beta) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 4\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 2\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\beta\right) - \cos(-\pi+\beta) + 2\cos(\beta) = \tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 2\cos(\beta) + \cos(\beta) + 2\cos(\beta) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 5\cos(\beta) = -1 + 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 5\cos(\beta) = -1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)\\
\Leftrightarrow\ & 5\cos\beta = -1+2\\
\Leftrightarrow\ & 5\cos\beta = 1\\
\Leftrightarrow\ & \cos\beta = \frac{1}{5} \quad \text{(c.q.p.)}
\end{aligned}$$

6.

6.1. Temos que $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $T(1, \tan\alpha)$.

Por outro lado, sabe-se que a ordenada do ponto T é $-2\sqrt{2}$, pelo que $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$. Assim vem que:

- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

  $1 + (-2\sqrt{2})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+8 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{3}$

  Como α pertence ao 4º quadrante, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

  $-2\sqrt{2} = \dfrac{\sin\alpha}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

  Portanto, $P\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

6.2. Sabe-se que $\cos\alpha = \dfrac{1}{3} \wedge \alpha \in 4^{\text{o}}\, Q$, pelo que $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$, isto é, $\alpha \approx -1,231\text{rad}$.
Portanto, pretende-se calcular a área de um setor circular de amplitude $1,231\text{rad}$.

$$\text{Área do setor circular } AOP = \frac{\pi r^2 \times \alpha}{2\pi} = \frac{\pi \times 1^2 \times 1,231}{2\pi} = \frac{1,231}{2} \approx 0,6$$

7.

7.1. Pretende-se determinar o menor valor positivo P tal que:
$\forall x \in \mathbb{R},\ x + P \in \mathbb{R},\ f(x+P) = f(x)$.
Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
& f(x+P) = f(x) \\
\Leftrightarrow\ & -2 - 4\cos\left(3 - \frac{x+P}{5}\right) = -2 - 4\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(3 - \frac{x+P}{5}\right) = \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(3 - \frac{x}{5} - \frac{P}{5}\right) = \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{P}{5} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & P = -10k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

O menor valor positivo de P obtém-se para $k = -1$, ou seja, $P = -10(-1)\pi \Leftrightarrow P = 10\pi$.
Portanto, o período positivo mínimo da função f é 10π.
Resposta: **(B)**

7.2. Determinemos uma expressão geral dos zeros de f.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 \Leftrightarrow\ & -2 - 4\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 4\cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) = -2 \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) = -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(3 - \frac{x}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & 3 - \frac{x}{5} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 3 - \frac{x}{5} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{x}{5} = -3 + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee -\frac{x}{5} = -3 - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x = 15 - \frac{10\pi}{3} - 10k\pi \vee x = 15 + \frac{10\pi}{3} - 10k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Substituindo k na primeira equação temos:

$k=0$: $x = 15 - \frac{10\pi}{3} \approx 4,5$
$k=1$: $x = 15 - \frac{10\pi}{3} - 10\pi \approx -26,9 \rightarrow$ zero negativo de maior valor que se obtém nesta equação

Substituindo k na segunda equação temos:

$k=1$: $x = 15 + \frac{10\pi}{3} - 10\pi \approx -5,9 \rightarrow$ zero negativo de maior valor que se obtém nesta equação

Portanto $x_1 = 15 + \frac{10\pi}{3} - 10\pi$, ou seja, $x_1 = 15 - \frac{20\pi}{3}$.

8. A abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos é a solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $]0,\pi[$.

Assim, vem que:

$$
\begin{aligned}
& \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) - \cos x = 0 \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & \cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0 \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & \left(\cos x = \frac{1+3}{4} \vee \cos x = \frac{1-3}{4}\right) \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & \left(\cos x = 1 \vee \cos x = -\frac{1}{2}\right) \quad \wedge \quad 0 < x < \pi \\
\Leftrightarrow\ & \left(x = 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \quad \wedge \quad 0 < x < \pi
\end{aligned}
$$

Para $k=-1$: $x = -2\pi \vee x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{8\pi}{3}$

Para $k=0$: $x = 0 \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3}$

Para $k=1$: $x = 2\pi \vee x = \frac{8\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3}$

Assim podemos verificar que a única solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $]0,\pi[$ é $x = \frac{2\pi}{3}$.

A ordenada do ponto pedido será igual a $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Logo $g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

Assim, o ponto pedido tem coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

9.

9.1. Temos que: $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ e $Q(2\cos, -2\sin\theta)$.
Pelo que: $\overline{QP} = -4\sin\theta$; $\overline{OR} = -2\sin\theta$ e $\overline{RQ} = 2\cos\theta$.
Assim,

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{[OPQR]} &= \frac{\overline{QP} + \overline{OR}}{2} \times \overline{RQ} \\
&= \frac{-4\sin\theta + (-2\sin\theta)}{2} \times (2\cos\theta) \\
&= \frac{-6\sin\theta}{2} \times (2\cos\theta) \\
&= (-3\sin\theta) \times (2\cos\theta) \\
&= -6\cos\theta\sin\theta \qquad \text{(c.q.m.)}
\end{aligned}$$

9.2. Sabe-se que $\tan\theta = -\sqrt{3} \wedge \theta \in 4^{\text{o}}$ quadrante, portanto $\theta = -\frac{\pi}{3}$.
Logo, a área do trapézio $[OPQR]$ é dada por

$$-6\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -6\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -6\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Resposta: **(B)**

10. Relativamente ao triângulo $[CBE]$, temos:

$$\tan(60°) = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}}$$

Por outro lado, relativamente ao triângulo $[CBD]$, tem-se:

$$\tan(45°) = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow 1 = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE} + \overline{ED}} \Leftrightarrow \overline{CB} = \overline{BE} + \overline{ED}$$

Logo $\overline{ED} = \overline{CB} - \overline{BE} = \overline{CB} - \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}}$, pois $\overline{BE} = \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}}$

Assim, $\overline{ED} = \overline{CB} - \frac{\overline{CB}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{ED} = \frac{\sqrt{3}\ \overline{CB} - \overline{CB}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{ED} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}\right)\overline{CB}$

Finalmente, em relação ao triângulo $[CBA]$, temos:

$$\tan(30°) = \frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA}} \Leftrightarrow \sqrt{3}(\overline{BE} + \overline{ED} + \overline{DA}) = 3\overline{CB}$$

Assim, vem que:

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{3}(\overline{BE}+\overline{ED}+\overline{DA}) = 3\overline{CB} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{BE}+\overline{ED}+\overline{DA} = \frac{3\overline{CB}}{\sqrt{3}} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{DA} = \frac{3\overline{CB}}{\sqrt{3}} - (\overline{BE}+\overline{ED}) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{DA} = \frac{3\overline{CB}}{\sqrt{3}} - \overline{CB}, \text{ pois } \overline{BE}+\overline{ED} = \overline{CB} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{DA} = \frac{3\overline{CB} - \sqrt{3}\ \overline{CB}}{\sqrt{3}} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{DA} = \frac{3\sqrt{3}\ \overline{CB} - 3\overline{CB}}{3} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{DA} = \sqrt{3}\ \overline{CB} - \overline{CB} \\
\Leftrightarrow\ & \overline{DA} = (\sqrt{3}-1)\overline{CB}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\overline{CB}}{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)\overline{CB}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = (\sqrt{3}-1) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = \sqrt{3} \qquad \text{(c.q.p.)}
\end{aligned}
$$

FIM