12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 2 | 2023

António Leite

1. Probabilidade de escolher o cartão que tem a cor amarela de um dos lados e a cor vermelha do outro lado: $\frac{1}{3}$.

   Probabilidade de escolhido esse cartão, o árbitro ver a cor vermelha e o jogador ver a cor amarela: $\frac{1}{2}$.

   Probabilidade pedida: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

   Resposta: **(C)**

2. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_4$

   Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_3 \times {}^{7}C_1 + {}^{5}C_4$

   Probabilidade pedida: $\frac{{}^{5}C_3 \times {}^{7}C_1 + {}^{5}C_4}{{}^{12}C_4} = \frac{5}{33}$.

3. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2$

   Número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2 - 4$

   Probabilidade pedida: $\frac{{}^{8}C_2 - 4}{{}^{8}C_2} = \frac{6}{7}$.

4. Sendo $P(\overline{B}) = 0,3$, então $P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$.

   Ora, $P(A) + P(B) = 0,4 + 0,7 = 1,1$ e $P(A) < P(B)$, pelo que:

   $$0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$$

   Por outro lado, temos que:

   $$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0,7 - P(A \cap B)$$

   Assim, vem que:

   $$\begin{aligned} & 0,1 \leq P(A \cap B) \leq 0,4 \\ \Leftrightarrow\ & -0,1 \geq -P(A \cap B) \geq -0,4 \\ \Leftrightarrow\ & 0,6 \geq 0,7 - P(A \cap B) \geq 0,3 \end{aligned}$$

   Logo, $P(\overline{A} \cap B) \in [0,3;0,6]$.

5.

5.1. Temos que $\overrightarrow{AB} = B - A = (3,-2) - (-1,4) = (4,-6)$.

Pelo que, o declive da reta AB é $m_{AB} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$.

Portanto, a inclinação α da reta AB é dada por $\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) + 180° \approx 123,7°$.

5.2. Temos que, $ax + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax + 5 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{5}{2}$.

Pelo que, a equação reduzida da reta r é: $y = -\frac{a}{2}x + \frac{5}{2}$ e o seu declive é dado por $m_r = -\frac{a}{2}$.

Como o declive da reta AB é dado por $m_{AB} = -\frac{3}{2}$, para a reta r seja perpendicular a esta, tem-se que $m_{AB} \times m_r = -1$, ou seja, $m_r = \frac{2}{3}$.

Assim, vem que: $-\frac{a}{2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$.

6.

6.1. O ponto G resulta da interseção da reta FG com o plano DCG. Determinemos uma equação do plano DCG.

A reta FG é perpendicular ao plano DCG e um vetor diretor desta reta tem coordenadas $(-3,4,0)$, pelo que, um vetor normal deste plano pode ter coordenadas $(-3,4,0)$.

O ponto $D(0,8,0)$ pertence ao plano DCG, pelo que, podemos obter uma equação cartesiana deste plano.

Assim, vem que:

$-3x + 4(y-8) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y - 32 = 0$.

Vamos, agora, obter a interseção da reta FG com o plano DCG, ou seja, as coordenadas do ponto G.

$$\begin{cases} x = 7 - 3k \\ y = 7 + 4k \\ z = 6 \\ -3x + 4y - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 3k \\ y = 7 + 4k \\ z = 6 \\ -3(7-3k) + 4(7+4k) - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7-3k \\ y = 7+4k \\ z = 6 \\ -21+9k+28+16k-32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7-3k \\ y = 7+4k \\ z = 6 \\ 25k = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7-3 \\ y = 7+4 \\ z = 6 \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 11 \\ z = 6 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, $G(4,11,6)$.

6.2. Número de casos possíveis: ${}^8C_3$
Número de casos favoráveis: $3 \times {}^4C_3$
Probabilidade pedida: $\dfrac{3 \times {}^4C_3}{{}^8C_3} = \dfrac{3}{14}$.

7. Número de casos possíveis: ${}^{12}C_7$
Número de casos favoráveis: ${}^5C_3 \times {}^4C_3 \times {}^3C_1$
Probabilidade pedida: $\dfrac{{}^5C_3 \times {}^4C_3 \times {}^3C_1}{{}^{12}C_7} = \dfrac{5}{33}$.

8. Pretendemos determinar $P\left(\overline{A} | (\overline{A \cap B})\right)$.
Ora,

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A} | (\overline{A \cap B})\right) &= \frac{P\left(\overline{A} \cap (\overline{A \cap B})\right)}{P(\overline{A \cap B})} \\ &= \frac{P\left((\overline{A} \cup \emptyset) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})\right)}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} \\ &= \frac{P\left(\overline{A} \cup (\emptyset \cap \overline{B})\right)}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} \\ &= \frac{P(\overline{A} \cup \emptyset)}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} \\ &= \frac{P(\overline{A})}{P(\overline{A} \cup \overline{B})} \end{aligned}$$

Temos ainda que:

$$P\left((A \cup \overline{B}) \cap \overline{A}\right) = 0,35$$

$$\Leftrightarrow P\left((A \cap \overline{A}) \cup (\overline{B} \cap \overline{A})\right) = 0,35$$

$$\Leftrightarrow P\left(\emptyset \cup (\overline{B} \cap \overline{A})\right) = 0,35$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = 0,35$$

Como $P(A)=0,4$, então $P(\overline{A})=1-0,4=0,6$.

Tem-se, ainda, que $P(B)=0,35$, então $P(\overline{B})=1-0,35=0,65$.

Logo,

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$\Leftrightarrow\ P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,6+0,65-0,35$$

$$\Leftrightarrow\ P(\overline{A}\cup\overline{B})=0,9$$

Portanto, $P\left(\overline{A}|(\overline{A\cap B})\right)=\dfrac{P(\overline{A})}{P(\overline{A}\cup\overline{B})}=\dfrac{2}{3}$.

9. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa, e os acontecimentos:

A: "O funcionário é homem"

B: "O funcionário tem excesso de peso"

Temos que:

- $P(A)=0,4$
- $P(B|A)=0,35$
- $P(\overline{B}|\overline{A})=0,7$

Pretendemos determinar $P(B)$.

Ora, temos que:

$$P(B|A)=0,35\Leftrightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0,35\Leftrightarrow P(B\cap A)=0,35\times 0,4\Leftrightarrow P(B\cap A)=0,14$$

$$P(\overline{B}|\overline{A})=0,7\Leftrightarrow\frac{P(\overline{B}\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}=0,7$$

$$\Leftrightarrow\ P(\overline{B}\cap\overline{A})=0,7\times 0,6\Leftrightarrow P(\overline{B}\cap\overline{A})=0,42$$

$$\Leftrightarrow\ P(\overline{B\cup A})=0,42\Leftrightarrow 1-P(B\cup A)=0,42\Leftrightarrow P(B\cup A)=1-0.42$$

$$\Leftrightarrow\ P(B\cup A)=0,58$$

Então,

$$P(B\cup A)=P(B)+P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow 0,58=P(B)+0,4-0,14\Leftrightarrow P(B)=0,32$$

A probabilidade pedida é 32%.

10. Os elementos da forma ${}^{12}C_p$, com $p \in \mathbb{N}_0 \wedge p \leq 12$, são os da linha 12, que tem 13 elementos, dos quais 4 são ímpares e 9 são pares.

Para que a soma desses dois elementos seja um número par, esses dois elementos ou são ambos ímpares (${}^{4}C_2$) ou são ambos pares (${}^{9}C_2$).

Número de casos possíveis: ${}^{4}C_2 + {}^{9}C_2$.

Desses os que o produto é ímpar são aqueles em que os dois elementos são ímpares, ou seja,

Número de casos favoráveis: ${}^{4}C_2$.

A probabilidade pedida é: $\dfrac{{}^{4}C_2}{{}^{4}C_2 + {}^{9}C_2} = \dfrac{1}{7}$.

FIM