12º ANO | PROPOSTA RESOLUÇÃO TESTE 2 | 2022

António Leite

1.

Seja n o número da linha.

Portanto, $1+n+n+1=48$, ou seja, $2n+2=48 \Leftrightarrow n=23$.

A linha 23 tem 24 elementos.

O número da casos possíveis é ${}^{24}C_2$.

Linha 23:

$$1 \qquad 23 \qquad {}^{23}C_2 = 253 \qquad {}^{23}C_3 = 1771 \qquad {}^{23}C_4 = 8855 \qquad {}^{23}C_5 = 33649 \qquad \ldots$$

Logo, há quatro elementos da linha 23 que são números de quatro algarismos, são eles:

$${}^{23}C_3, {}^{23}C_4, {}^{23}C_{19} \text{ e } {}^{23}C_{20}$$

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{4}C_2$.

Pelo que, a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{4}C_2}{{}^{24}C_2} = \dfrac{1}{46}$.

Resposta: **(D)**

2.

Para averiguar se a função é contínua em $x=1$, temos que verificar se

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

- $f(1) = \dfrac{1}{12}$
- $$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+8-9}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x-8}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{1}{2\times 6} = \frac{1}{12}$$

•

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-x-1}{12x^3-12} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(2x+1)(x-1)}{(12x^2+12x+12)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{12x^2+12x+12} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Cálculo Auxiliar - Regra de Ruffini

	2	-1	-1
1		2	1
	2	1	0

	12	0	0	−12
1		12	12	12
	12	12	12	0

Como $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 1$.

3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9+\frac{1}{x^2}\right)}}{2x-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{9+0}}{2-0} = -\frac{3}{2}$$

Portanto, $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{2x-1} + a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{2x^2-x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Assim, $\lim_{x\to+\infty} \frac{4-x^2}{2x^2-x+6} - b = -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - b = -3 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} + 3 \Leftrightarrow b = \frac{5}{2}$

Pelo que, $a + b = 1 + \frac{5}{2} \Leftrightarrow a + b = \frac{7}{2}$.

4.

Consideremos a experiênca aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um elemento deste grupo de Cataris e os acontecimentos:

A: "o elemento apoiou a Argentina"

F: "o elemento apoiou a França"

Temos que:

- como o número de elementos que apoiou a seleção da Argentina é igual ao dobro do número de elementos que apoiou a seleção da França, então $P(A) = 2P(F)$;
- como o número de elementos que apoiou, pelo menos, uma destas duas seleções é igual ao quíntuplo do número de elementos que não apoiou a seleção da Argentina e apoiou a seleção da França, então $P(A \cup F) = 5P(\overline{A} \cap F)$.

Assim, vem que:

$$
\begin{aligned}
& P(A \cup F) = 5P(\overline{A} \cap F) \Leftrightarrow P(A) + P(F) - P(A \cap F) = 5(P(F) - P(A \cap F)) \\
\Leftrightarrow\ & P(A) + P(F) - P(A \cap F) = 5P(F) - 5P(A \cap F) \\
\Leftrightarrow\ & 5P(A \cap F) - P(A \cap F) = 5P(F) - P(F) - P(A) \\
\Leftrightarrow\ & 4P(A \cap F) = 4P(F) - P(A)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $P(A) = 2P(F)$, ou seja, $P(F) = \dfrac{P(A)}{2}$, assim temos que:

$$
\begin{aligned}
& 4P(A \cap F) = 4P(F) - P(A) \\
\Leftrightarrow\ & 4P(A \cap F) = 4 \times \frac{P(A)}{2} - P(A) \\
\Leftrightarrow\ & 4P(A \cap F) = 2P(A) - P(A) \\
\Leftrightarrow\ & 4P(A \cap F) = P(A) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{P(A \cap F)}{P(A)} = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow\ & P(F|A) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Pretende-se determinar a probabilidade do elemento escolhido, ao acaso, ter apoiado a seleção da França, sabendo que apoiou a seleção da Argentina, isto é $P(F|A)$.

Portanto, $P(F|A) = \dfrac{1}{4} = 25\%$.

5.

5.1.

$\dfrac{8!}{2!} = 20160$

5.2.

Número de casos possíveis= $\dfrac{12!}{2!2!2!} = 59875200$

Número de casos favoráveis:

- O anagrama pode começar pela letra U: $1 \times \dfrac{11!}{2!2!2!}$
- O anagrama pode começar pela letra I: $1 \times \dfrac{11!}{2!2!}$
- O anagrama pode começar pela letra A: $1 \times \dfrac{11!}{2!2!2!}$
- O anagrama pode começar pela letra E: $1 \times \dfrac{11!}{2!2!}$

Portanto, o número de casos favoráveis é igual a

$$2 \times \frac{11!}{2!2!2!} + 2 \times \frac{11!}{2!2!} = 29937600$$

Assim, a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{29937600}{59875200} = \frac{1}{2}$$

6.

O número de casos possíveis é igual a ${}^{10}C_4$.

O número de casos favoráveis é igual à diferença entre o número total de caminhos existentes que ligam o ponto A ao ponto B e o número total de caminhos que ligam o ponto A ao B e que passam pelo ponto C, ou seja, ${}^{10}C_4 - {}^{3}C_1 \times {}^{7}C_3$.

Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{10}C_4 - {}^{3}C_1 \times {}^{7}C_3}{{}^{10}C_4} = 0,5$.

7.

Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um sócio desta associação, e os acontecimentos:

A: "o sócio pratica caça"

B: "o sócio pratica pesca"

Temos que: $P(A) = 0,8$; $P(\overline{B}|A) = 0,25$ e $P(\overline{A} \cap B) = 0,05$.

Pretende-se determinar $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Pelo que: $P(\overline{B}|A) = 0,25 \Leftrightarrow \dfrac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = 0,25 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap A) = 0,25 \times 0,8 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap A) = 0,2$.

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

	A	$\overline{A}$	Total
B	$0,6$	$0,05$	$0,65$
$\overline{B}$	$0,2$	$0,15$	$0,35$
Total	$0,8$	$0,2$	1

Portanto, $P(\overline{A}|\overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0,15}{0,35} = \dfrac{3}{7}$.

8.

Ora, $P(A)+P(B) = 0,45+0,75 = 1,2$ e $P(A) < P(B)$, pelo que:

$$0,2 \leq P(A\cap B) \leq 0,45$$

Por outro lado, temos que:

$$P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow P(\overline{A}\cap B) = 0,75 - P(A\cap B)$$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned}
& 0,2 \leq P(A\cap B) \leq 0,45 \\
\Leftrightarrow\ & -0,45 \leq -P(A\cap B) \leq -0,2 \\
\Leftrightarrow\ & 0,75-0,45 \leq 0,75-P(A\cap B) \leq 0,75-0,2 \\
\Leftrightarrow\ & 0,3 \leq 0,75-P(A\cap B) \leq 0,55
\end{aligned}$$

Das quatro opções, apenas $0,35$ é um valor que verifica esta condição.

Resposta: **(B)**

9.

$$u_n = \frac{n-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2}$$

$$\begin{array}{rr|l}
n & -1 & n+2 \\ \cline{3-3}
-n & -2 & 1 \\
 & -3 &
\end{array}$$

Assim, vem que: $\lim u_n = \lim\left(1 - \dfrac{3}{n+2}\right) = 1^-$.

Daqui resulta que $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

Resposta: **(D)**

10.

10.1.

Como a superfície esférica tem centro no ponto C e passa no ponto G, o comprimento do raio é

$$
\begin{aligned}
r = \overline{CG} &= \sqrt{(4-2)^2+(2-18)^2+(-6-2)^2} \\
&= \sqrt{2^2+(-16)^2+(-8)^2} \\
&= \sqrt{4+256+64} \\
&= \sqrt{324} \\
&= 18
\end{aligned}
$$

Como as coordenadas do centro são $(4,2,-6)$, a equação da superfície esférica é

$$(x-4)^2+(x-2)^2+(z+6)^2=324$$

Resposta: **(B)**

10.2.

O ponto E resulta da interseção da reta AE com o plano EFG.

Determinemos uma equação do plano EFG.

A reta AE é perpendicular ao plano EFG e um vetor diretor desta reta tem coordenadas $(-1,8,4)$, pelo que, um vetor normal deste plano pode ter coordenadas $(-1,8,4)$.

O ponto $G(2,18,2)$ pertence ao plano EFG, pelo que, podemos obter uma equação cartesiana deste plano.

Assim vem que:

$$
\begin{aligned}
& -1(x-2)+8(y-18)+4(z-2)=0 \\
\Leftrightarrow\ & -x+2+8y-144+4z-8=0 \\
\Leftrightarrow\ & -x+8y+4z-150=0
\end{aligned}
$$

Vamos, agora, obter a interseção da reta AE com o plano EFG, ou seja, as coordenadas do ponto E.

$$
\begin{cases}
x=7-k \\
y=5+8k \\
z=9+4k \\
-x+8y+4z-150=0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x=7-k \\
y=5+8k \\
z=9+4k \\
-(7-k)+8(5+8k)+4(9+4k)-150=0
\end{cases}
$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ -7 + k + 40 + 64k + 36 + 16k - 150 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ 81k - 81 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - k \\ y = 5 + 8k \\ z = 9 + 4k \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 13 \\ z = 13 \\ k = 1 \end{cases}$$

Logo, $E(6,13,13)$.

FIM