Prova Modelo Exame Final de Matemática A

Prova 1 | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

António Leite

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância 30 minutos. | 5 Páginas.

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado a cor vermelha, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

O formulário pode ser visto *aqui*.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(1 - \dfrac{3!}{2 \times {}^{n}C_2 + n}\right)^{2n}$?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** e **(D)** $+\infty$

2. Foi feito um inquérito aos selecionadores de todas as seleções filiadas na FIFA, com o intuito que escolhessem, na opinião de cada um, três nomes para melhor jogador de futebol do mundo. As pontuações foram dadas de acordo com a colocação do atleta, em cada lista, 5 para o primeiro, 3 para o segundo e 1 para o terceiro.

2.1. Da análise dos resultados desse inquérito resultou o seguinte:

- o número de selecionadores que elegeu o nome do Cristiano Ronaldo é igual ao número de selecionadores que elegeu o nome do Lionel Messi;
- 60% dos selecionadores não elegeu o nome do Cristiano Ronaldo;
- 25% dos selecionadores que elegeu o nome do Lionel Messi, não elegeu o nome do Cristiano Ronaldo.

Selecionou-se, ao acaso, um selecionador que, no inquérito, não tinha elegido o nome do Lionel Messi.

Determine a probabilidade de esse selecionador, no inquérito, também não ter elegido o nome do Cristiano Ronaldo.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Os selecionadores das 30 seleções mais bem cotadas no ranking vão dispor-se lado a lado, em linha reta, para tirar uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor os 30 selecionadores de modo a que não haja selecionadores das 5 seleções mais bem cotadas no ranking juntos?

(A) ${}^{30}A_5 \times 25!$ **(B)** ${}^{26}A_5 \times 25!$ **(C)** ${}^{26}C_5 \times 25!$ **(D)** ${}^{30}C_5 \times 25!$

2.3. Atualmente há 211 seleções filiadas na FIFA, entre as quais as europeias, sendo o número de seleções europeias menor do que o número total das restantes seleções.

Para representar a FIFA num evento internacional vão ser selecionados dois selecionadores de entre estas 211 seleções.

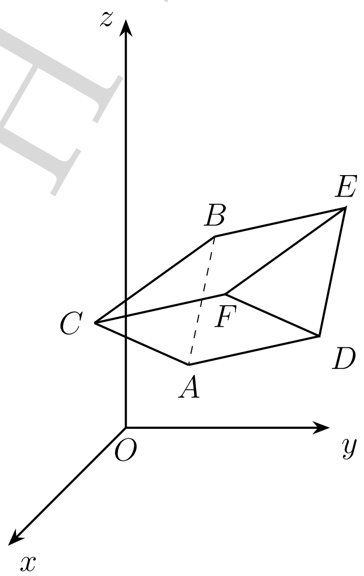
Sabe-se que a probabilidade de selecionar dois selecionadores de modo a que um deles seja de uma seleção europeia e o outro não é $\dfrac{572}{1477}$.

Determine o número de seleções europeias que estão, atualmente, filiadas na FIFA.

3. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[ABCDEF]$, de bases $[ABC]$ e $[DEF]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto D são $(6, 8, 5)$;
- o plano ABC é definido pela equação $3x+5y+2z-30=0$.



3.1. Qual das equações seguintes define uma reta contida no plano DEF?

(A) $(x, y, z) = (6, 8, 5) + k(3, 5, 2), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (10, 6, 4) + k(-3, 1, 2), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (2, 6, 4) + k(6, 10, 4), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (5, 3, -7) + k(6, -2, -4), k \in \mathbb{R}$

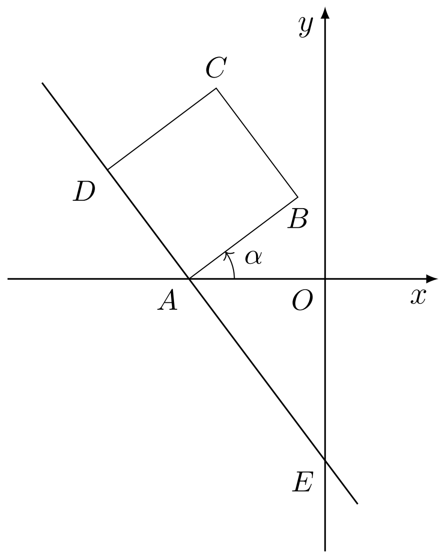
3.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e que passa no ponto D.

3.3. Seja P o simétrico do ponto D relativamente ao plano xOy.
Determine a amplitude do ângulo ODP.
Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. Oxy, o quadrado $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- a reta AB tem inclinação α;
- $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$;
- o ponto A tem coordenadas $(-3, 0)$;
- a reta AD interseta o eixo Oy no ponto E.

Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EO}$.

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x)}{2x-2} & \text{se } x>1\\[2ex] \dfrac{xe^{x-1}}{2} & \text{se } x\leq 1\end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

5.1. Averigue se a função g é contínua em $x=1$.

5.2. Resolva, no intervalo $]-\infty,1]$, a equação $2g(x)-e^{x-1}=(x-1)(e^{2x-2}-2)$.

6. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que para um certo valor real de a, $f'(a)=2a^3$ (f' designa a primeira derivada de f).

Qual é o valor, em função de a, de $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x^2-a^2}$?

(A) a **(B)** $2a$ **(C)** a^2 **(D)** a^3

7. Considere a função f, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, definida por

$$f(x)=\log_3(4\cos^3(x)-2\cos(x))-\log_3(2\cos(x)).$$

Resolva a equação $f(x)=\dfrac{\log_3\left(\frac{3}{4}\right)}{2}$.

8. Seja h a função, de domínio $]0,\pi[$, definida por $h(x)=\frac{1}{2}\cos^2(x)-\cos(x)-\frac{1}{4}$.

Seja r a reta tangente ao gráfico da função h que tem declive máximo.

Determine o valor exato do declive da reta r.

9. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja j a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$j(x)=\frac{x^3}{4x^2-\ln(x^2)}.$$

O gráfico de j tem uma assíntota oblíqua.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

10. Um automóvel teve um furo num dos seus pneus. A pressão P, desse pneu, medida em psi, t minutos após ter furado é dada por:

$$P(t) = 8 + 32e^{-0{,}4904t}$$

Num certo instante t_1, a pressão P desse pneu, tinha menos 6 psi do que 4 minutos antes desse instante.

Determine, utilizando a calculadora gráfica, o valor de t_1, sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- Apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- Reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arrendondadas às milésimas.

11. Considere a função p, de domínio $]0, 2\pi[$, definida por $p(x) = \sqrt{2} - 4\sin x \cos x$.

Escolhe-se, ao acaso, um dos zeros da função p.

Qual é a probabilidade desse zero pertencer ao terceiro quadrante?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** $\frac{3}{4}$ **(D)** 1

12. Um café registou a temperatura média diária durante 8 dias e o número de chás vendidos em cada um desses dias.

Os resultados encontram-se registados na tabela seguinte.

Temperatura (°C)	20	25	26	27	29	28	32	36
Número de chás vendidos	100	80	72	74	65	69	k	k

Sabe-se, ainda que:

- k representa o número de chás vendidos, por dia, quando as temperaturas foram superiores a 30°C;
- a média do número de chás vendidos nestes 8 dias foi de 73.

Admita que a relação entre as variáveis da tabela anterior é, aproximadamente, linear, sendo modelada pela reta de regressão de equação da forma $y = ax + b$.

Estime o número de chás vendidos, arredondado às unidades, para um dia em que a temperatura média registada seja 30°C.

Na sua resposta, percorra as seguintes etapas:

1. Determine o valor de k;
2. Determine a equação da reta de regressão, utilizando os valores de a e de b com 3 casas decimais;
3. Responda ao problema.

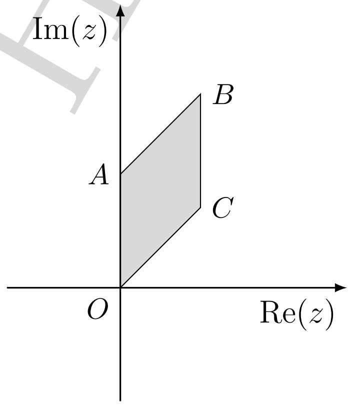
13. Em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}.$$

Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o losango $[OABC]$.

Sabe-se que:

- A e C são os afixos de z_1 e z_2, respetivamente.
- B é o afixo de $z_1 + z_2$.



Justifique que o argumento principal de $z_1 + z_2$ é $\frac{3\pi}{8}$ e em seguida mostre que

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

FIM

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6**	**8**	**10.**	**11.**	**13.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	14	14	12	14	14	12	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação	**2.3.**	**3.3.**	**4.**	**7.**	**9.**	**12.**							**Subtotal**
Cotação em pontos	3×14												**42**
TOTAL													**200**