# Prova Modelo Exame Final de Matemática A

## Prova 2 | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

António Leite

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância 30 minutos. | 6 Páginas.

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado a cor vermelha, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

O formulário pode ser visto *aqui*.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

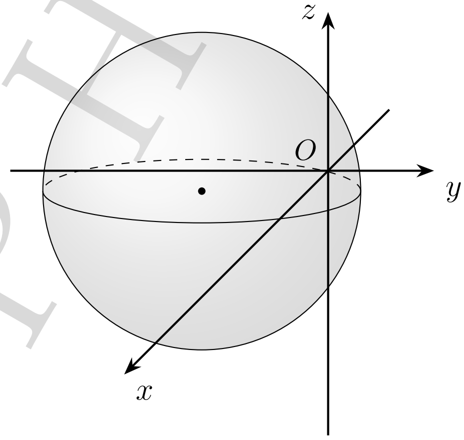
Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

**1.** Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera $\varepsilon$ definida pela inequação

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \leq 9.$$

Sabe-se que:

- o plano $\alpha$ é tangente, num ponto $A$, à esfera $\varepsilon$ e é definido pela equação cartesiana $2x+y+2z+9=0$;
- $[AB]$ é um diâmetro da esfera $\varepsilon$.




**1.1.** A interseção da esfera $\varepsilon$ com o plano de equação $z=\sqrt{5}$ é:

**(A)** uma circunferência de raio 2.

**(B)** um círculo de área $4\pi$.

**(C)** o ponto de coordenadas $(1,-2,\sqrt{5})$.

**(D)** um círculo de centro no ponto de coordenadas $(1,-2,0)$.

**1.2.** Determine as coordenadas do ponto $B$.

**2.** Seja $f$ a função trigonométrica, de domínio $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ e $a<b$.

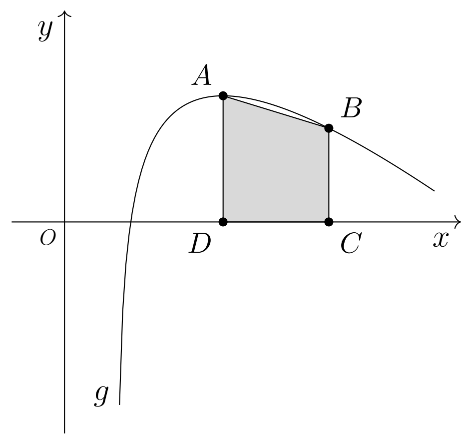
Sabe-se que:

- o zero da função $f$ de menor valor é $\frac{101\pi}{10}$;
- a expressão geral dos zeros da função $f$ é $x=\frac{101\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$;
- a soma de todos os zeros da função $f$ é $6000\pi$.

Determine o número de zeros da função $f$.

**3.** Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico da função $g$ definida por $g(x)=4-x+2\ln(x-1)$, de domínio $]1,+\infty[$, e um trapézio $[ABCD]$.
Sabe-se que:

- o ponto $A$ é o ponto do gráfico da função $g$ de ordenada máxima;
- o ponto $B$ pertence ao gráfico da função $g$ e tem abcissa 5;
- o ponto $C$ tem a mesma abcissa que o ponto $B$ e pertence ao eixo $Ox$;
- o ponto $D$ tem a mesma abcissa que o ponto $A$ e pertence ao eixo $Ox$.




Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $6\ln 2$.

**4.** Seja $a$ um número real pertencente ao intervalo $]0,1[$.

Considere o seguinte conjunto de dados:

$$\ln(a); \quad \ln(\sqrt[3]{a^2}); \quad \ln\left(\frac{1}{a^2}\right); \quad \ln(a^3); \quad \ln(\sqrt{a}); \quad \ln\left(\frac{1}{a^3}\right); \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right); \quad \ln(a^2).$$

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números **I**, **II** e **III**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma e uma só opção.

A amplitude deste conjunto de dados é __**I**__.

A mediana deste conjunto de dados é __**II**__.

A média deste conjunto de dados é __**III**__.

| **I** | **II** | **III** |
|---|---|---|
| **a)** $\ln(a^6)$ | **a)** $\frac{7}{8}\ln(a)$ | **a)** $\frac{7}{24}\ln(\sqrt{a})$ |
| **b)** $1$ | **b)** $\frac{7}{6}\ln(\sqrt{a})$ | **b)** $\frac{1}{8}\ln(\sqrt[7]{a^6})$ |
| **c)** $\ln\left(\frac{1}{a^6}\right)$ | **c)** $\frac{1}{2}\ln(\sqrt[7]{a^6})$ | **c)** $\frac{1}{2}\ln(a)$ |

**5.** Um saco contém um certo número de cartões.

Em cada cartão está escrito um número natural.

Retira-se, ao acaso, um cartão do saco.

Considere os seguintes acontecimentos:

$A$: "O cartão extraído tem um número par."

$B$: "O cartão extraído tem um número múltiplo de 3."

$C$: "O cartão extraído tem um número múltiplo de 6."

Sabe-se que:

- $P(C) = \dfrac{2}{5}$;
- $P(B \mid A) = \dfrac{1}{2}$;
- $P(\bar{A} \mid (A \cup B)) = \dfrac{1}{5}$.

Determine o valor exato de $P(B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**6.** O António deslocou-se a um restaurante de sushi.

Do menu deste restaurante fazem partes as 6 especialidades seguintes: Pratos Quentes, Temakis, Hossomakis, Gunkans, Uramakis e Nigiris.

**6.1.** O António decidiu que o seu pedido iria recair num item de cada uma das 6 especialidades. Porém, pedia o Gunkan imediatamente antes do Temaki, mas nenhum dos dois antes do Prato Quente.

Nestas condições, de quantos modos diferentes pode o António fazer o seu pedido?

**(A)** 24 **(B)** 48 **(C)** 60 **(D)** 120

**6.2.** Relativamente ao menu deste restaurante, sabe-se, ainda, que:

- 40% são Pratos Quentes;
- dos Pratos Quentes, 60% têm camarão;
- 18% não são Pratos Quentes, mas têm camarão.

Escolhe-se, ao acaso, um item do menu deste restaurante.

Determine a probabilidade desse item não ter camarão.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

**7.** Considere, para um certo número real $k$, a função $f$ de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} - \dfrac{k}{3} & \text{se } x > 1 \\ \dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-6} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

**7.1.** O gráfico da função $f$ admite uma assíntota horizontal quando $x$ tende para $-\infty$.

A equação dessa assíntota é:

**(A)** $y = \sqrt{3}$ **(B)** $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $y = -\sqrt{3}$ **(D)** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**7.2.** Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Determine o valor de $k$.

**8.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $f$ uma função diferenciável, de domínio $]0, \pi[$, cuja derivada, $f'$ é dada por:

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$$

Estude a função $f$ quanto ao sentido das concavidadas do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de $f$ tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de $f$, caso este(s) exista(m).

**9.** Considere uma função $f$, de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+3x)=4$;
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe e é negativo, para qualquer número real;
- $f(b)\times f(b+1)<0$, para um certo número real $b$.

Considere as proposições seguintes:

**I.** $y-3x-4=0$ é uma equação da assíntota ao gráfico de $f$ quando $x$ tende para $+\infty$.

**II.** A função $f$ é contínua em $\mathbb{R}$.

**III.** O teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir, no intervalo $[b,\ b+1]$, a existência de, pelo menos, um zero da função $f$.

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das proposições é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta apresente três razões diferentes, uma para cada proposição.

**10.** O António comprou um quadro.

O valor $V$ desse quadro, em euros, é dado, em função do tempo $t$, em anos, desde do instante em que o António fez a aquisição do quadro, por:

$$V(t)=600+200\ln(t+1).$$

Sabe-se que, quadriplicando um certo instante $t_1$, com $t_1\geq 10$, o valor do quadro aumenta 20%.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de $t_1$, sabendo que existe e é único.

Apresente o resultado em anos e meses (meses arredondados às unidades).

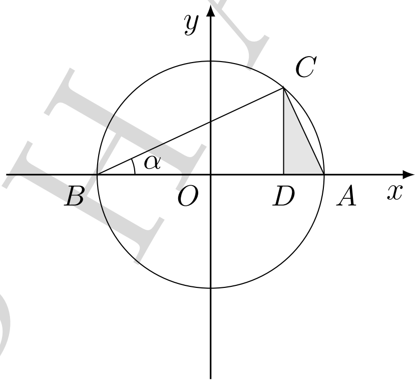
Não justifique a validade do resultado obtido.

Na sua resposta:

- Apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- Reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arrendondadas às milésimas.

**11.** Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $xOy$, uma circunferência de centro no ponto $O$ a raio 1.

Sabe-se que:




- os pontos $A$, $B$ e $C$ pertencem à circunferência;
- o ponto $A$ pertence ao semieixo positivo $Ox$ e o ponto $B$ pertence ao semieixo negativo $Ox$;
- o ponto $C$ pertence ao primeiro quadrante e o ponto $D$ tem a mesma abcissa que o ponto $C$ e pertence ao semieixo positivo $Ox$.

Seja $\alpha$ a amplitude em radianos do ângulo $ABC$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

**11.1.** Prove que a área $A$ do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de $\alpha$, pela expressão

$$A(\alpha) = 2\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

**11.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

Mostre, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função $A$ cuja ordenada é igual a $0,25$.

**12.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \dfrac{-9+3i}{1-2i}$.

Qual dos seguintes é um argumento de $i^{463}z$?

**(A)** $\frac{5\pi}{4}$ **(B)** $\frac{\pi}{4}$ **(C)** $-\frac{3\pi}{4}$ **(D)** $-\frac{5\pi}{4}$

**13.** Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos a equação $z^3 + z + 10 = 0$.

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos que são solução desta equação são vértices de um polígono.

Determine a área desse polígono.

**14.** Considere os pontos $A$ e $B$ de coordenadas $(0, 3k)$ e $(0, k)$, respetivamente, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Considere, ainda:

- o ponto $P$ pertencente à bissetriz do primeiro quadrante.
- a reta $AP$ de declive negativo e cuja abcissa do ponto de interseção com o eixo $Ox$ é $x_1$;
- a reta $BP$, também de declive negativo, e cuja abcissa do ponto de interseção com o eixo $Ox$ é $x_2$.

Mostre que a diferença entre o inverso de $x_1$ e o inverso de $x_2$ é igual a $\dfrac{2}{3k}$.

# FIM

| As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final. | **1.1** | **1.2.** | **4** | **6.1.** | **6.2.** | **7.1.** | **7.2.** | **9.** | **10.** | **11.1** | **12.** | **14.** | **Subtotal** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação (em pontos) | 12 | 14 | 12 | 12 | 14 | 12 | 14 | 14 | 14 | 14 | 12 | 14 | **158** |
| Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação | **2.** | **3.** | **5.** | **8.** | **11.2.** | **13.** | | | | | | | **Subtotal** |
| Cotação em pontos | $3 \times 14$ | | | | | | | | | | | | **42** |
| **TOTAL** | | | | | | | | | | | | | **200** |