

Prova Modelo Exame Final de Matemática A

Prova 2 | Ensino Secundário | 2024

12.º Ano de Escolaridade

António Leite

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância 30 minutos. | 6 Páginas.

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado a cor vermelha, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

O formulário pode ser visto *aqui*.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera ε definida pela inequação

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 \leq 9.$$

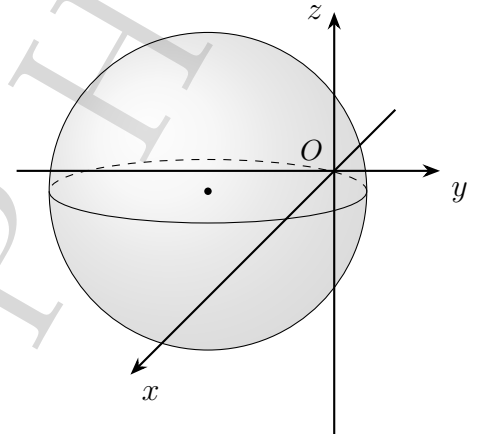
Sabe-se que:

- o plano α é tangente, num ponto A , à esfera ε e é definido pela equação cartesiana $2x + y + 2z + 9 = 0$;
- $[AB]$ é um diâmetro da esfera ε .

1.1. A interseção da esfera ε com o plano de equação $z = \sqrt{5}$ é:

- (A) uma circunferência de raio 2.
- (B) um círculo de área 4π .
- (C) o ponto de coordenadas $(1, -2, \sqrt{5})$.
- (D) um círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, -2, 0)$.

1.2. Determine as coordenadas do ponto B .



2. Seja f a função trigonométrica, de domínio $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.

Sabe-se que:

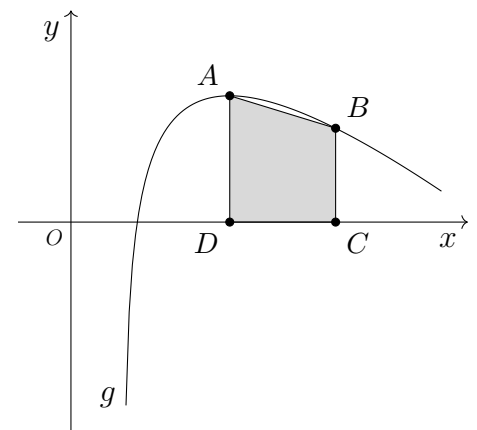
- o zero da função f de menor valor é $\frac{101\pi}{10}$;
- a expressão geral dos zeros da função f é $x = \frac{101\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$;
- a soma de todos os zeros da função f é 6000π .

Determine o número de zeros da função f .

3. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g definida por $g(x) = 4 - x + 2\ln(x - 1)$, de domínio $]1, +\infty[$, e um trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto do gráfico da função g de ordenada máxima;
- o ponto B pertence ao gráfico da função g e tem abcissa 5;
- o ponto C tem a mesma abcissa que o ponto B e pertence ao eixo Ox ;
- o ponto D tem a mesma abcissa que o ponto A e pertence ao eixo Ox .



Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $6 \ln 2$.

4. Seja a um número real pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

Considere o seguinte conjunto de dados:

$$\ln(a); \ln(\sqrt[3]{a^2}); \ln\left(\frac{1}{a^2}\right); \ln(a^3); \ln(\sqrt{a}); \ln\left(\frac{1}{a^3}\right); \ln\left(\frac{1}{a}\right); \ln(a^2).$$

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números **I**, **II** e **III**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma e uma só opção.

A amplitude deste conjunto de dados é **I**.

A mediana deste conjunto de dados é **II**.

A média deste conjunto de dados é **III**.

I	II	III
a) $\ln(a^6)$	a) $\frac{7}{8} \ln(a)$	a) $\frac{7}{24} \ln(\sqrt{a})$
b) 1	b) $\frac{7}{6} \ln(\sqrt{a})$	b) $\frac{1}{8} \ln(\sqrt[7]{a^6})$
c) $\ln\left(\frac{1}{a^6}\right)$	c) $\frac{1}{2} \ln(\sqrt[7]{a^6})$	c) $\frac{1}{2} \ln(a)$

5. Um saco contém um certo número de cartões.

Em cada cartão está escrito um número natural.

Retira-se, ao acaso, um cartão do saco.

Considere os seguintes acontecimentos:

A: “O cartão extraído tem um número par.”

B: “O cartão extraído tem um número múltiplo de 3.”

C: “O cartão extraído tem um número múltiplo de 6.”

Sabe-se que:

- $P(C) = \frac{2}{5}$;
- $P(B | A) = \frac{1}{2}$;
- $P(\bar{A} | (A \cup B)) = \frac{1}{5}$.

Determine o valor exato de $P(B)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

6. O António deslocou-se a um restaurante de sushi.

Do menu deste restaurante fazem partes as 6 especialidades seguintes: Pratos Quentes, Temakis, Hossomakis, Gunkans, Uramakis e Nigiris.

6.1. O António decidiu que o seu pedido iria recair num item de cada uma das 6 especialidades. Porém, pedia o Gunkan imediatamente antes do Temaki, mas nenhum dos dois antes do Prato Quente.

Nestas condições, de quantos modos diferentes pode o António fazer o seu pedido?

- (A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 120

6.2. Relativamente ao menu deste restaurante, sabe-se, ainda, que:

- 40% são Pratos Quentes;
- dos Pratos Quentes, 60% têm camarão;
- 18% não são Pratos Quentes, mas têm camarão.

Escolhe-se, ao acaso, um item do menu deste restaurante.

Determine a probabilidade desse item não ter camarão.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

7. Considere, para um certo número real k , a função f de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} - \frac{k}{3} & \text{se } x > 1 \\ \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-6} & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

7.1. O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$. A equação dessa assíntota é:

- (A) $y = \sqrt{3}$ (B) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $y = -\sqrt{3}$ (D) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

7.2. Sabe-se que existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Determine o valor de k .

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja f uma função diferenciável, de domínio $]0, \pi[$, cuja derivada, f' é dada por:

$$f'(x) = \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)}$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , caso este(s) exista(m).

9. Considere uma função f , de domínio \mathbb{R} .

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x) = 4$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe e é negativo, para qualquer número real;
- $f(b) \times f(b + 1) < 0$, para um certo número real b .

Considere as proposições seguintes:

- I. $y - 3x - 4 = 0$ é uma equação da assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$.
- II. A função f é contínua em \mathbb{R} .
- III. O teorema de Bolzano-Cauchy permite garantir, no intervalo $[b, b + 1]$, a existência de, pelo menos, um zero da função f .

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das proposições é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta apresente três razões diferentes, uma para cada proposição.

10. O António comprou um quadro.

O valor V desse quadro, em euros, é dado, em função do tempo t , em anos, desde do instante em que o António fez a aquisição do quadro, por:

$$V(t) = 600 + 200 \ln(t + 1).$$

Sabe-se que, quadruplicando um certo instante t_1 , o valor do quadro aumenta 20%.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1 , sabendo que existe e é único.

Apresente o resultado em anos e meses (meses arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido.

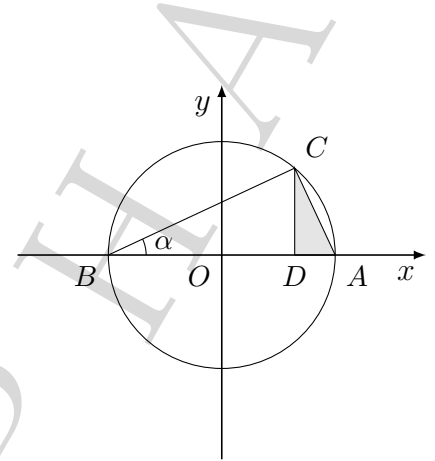
Na sua resposta:

- Apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- Reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

11. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro no ponto O a raio 1.

Sabe-se que:

- os pontos A , B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao semieixo negativo Ox ;
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e o ponto D tem a mesma abscissa que o ponto C e pertence ao semieixo positivo Ox .



Seja α a amplitude em radianos do ângulo ABC ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$).

- 11.1. Prove que a área A do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de α , pela expressão

$$A(\alpha) = 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha.$$

- 11.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos. Mostre, recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função A cuja ordenada é igual a $0,25$.

12. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z = \frac{-9 + 3i}{1 - 2i}$.

Qual dos seguintes é um argumento de $i^{463}z$?

- (A) $\frac{5\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $-\frac{3\pi}{4}$ (D) $-\frac{5\pi}{4}$

13. Considere, em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos a equação $z^3 + z + 10 = 0$.

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos que são soluções desta equação são vértices de um polígono.

Determine a área desse polígono.

14. Considere os pontos A e B de coordenadas $(0, 3k)$ e $(0, k)$, respetivamente, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Considere, ainda:

- o ponto P pertencente à bissetriz do primeiro quadrante.
- a reta AP de declive negativo e cuja abscissa do ponto de interseção com o eixo Ox é x_1 ;
- a reta BP , também de declive negativo, e cuja abscissa do ponto de interseção com o eixo Ox é x_2 .

Mostre que a diferença entre o inverso de x_1 e o inverso de x_2 é igual a $\frac{2}{3k}$.

FIM

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1	1.2.	4	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	9.	10.	11.1	12.	14.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	12	14	12	14	14	14	14	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação	2.	3.	5.	8.	11.2.	13.							Subtotal
Cotação em pontos	3×14											42	
TOTAL													200