1 1.1 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \leq 9 \wedge z = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (\sqrt{5})^2 \leq 9 \wedge z = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9 - 5 \wedge z = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 4 \wedge z = \sqrt{5}$

Portanto, a interseção da esfera ε com o plano de equação $z = \sqrt{5}$ é um círculo de centro no ponto de coordenadas $(1, -2, \sqrt{5})$ e raio 2. Assim, temos que a área do círculo é
$\pi \times 2^2 = 4\pi$

Resposta: (B).

1.2. Seja C o centro da esfera, logo, $C(1, -2, 0)$.

A reta AC é perpendicular ao plano α, logo um vetor diretor desta reta é um vetor normal ao plano α, pelo que, pode ser o vetor de coordenadas $(2,1,2)$

Portanto, a reta AC pode ser definida vetorialmente pela equação:

$(x,y,z) = (1,-2,0) + k(2,1,2), k \in \mathbb{R}$, pelo que qualquer

ponto da reta AC tem coordenadas $(1+2k, -2+k, 2k)$, sendo k um número real.

O ponto A é o ponto da reta AC cujas coordenadas satisfazem a equação $2x + y + 2z + 9 = 0$, assim temos que:

$2(1+2k) + (-2+k) + 2(2k) + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$2 + 4k - 2 + k + 4k + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$9k = -9 \Leftrightarrow k = -1$

Portanto, o ponto A é o ponto de coordenadas $(-1, -3, -2)$.

Por outro lado, $B = C + \overrightarrow{AC}$.

Ora, $\overrightarrow{AC} = C - A \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = (1,-2,0) - (-1,-3,-2)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = (2,1,2)$

Assim, $B = (1,-2,0) + (2,1,2) \Leftrightarrow B = (3,-1,2)$.

(2) Como a expressão geral dos zeros da função f é $x = \frac{101\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$, cada zero da função, à exceção do de menor valor, é acrescido de $\frac{\pi}{5}$ unidades em relação ao zero imediatamente anterior, pelo que a sucessão dos zeros da função f é uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi}{5}$ $(r = \frac{\pi}{5})$ e cujo primeiro termo é o zero de menor valor, isto é, $\frac{101\pi}{10}$ $(u_1 = \frac{101\pi}{10})$.

Por outro lado, a soma de todos os zeros da função f é 6000π $(S_n = 6000\pi)$.

O termo geral da sucessão é $u_n = u_1 + (n-1) \times r$, ou seja,

$u_n = \frac{101\pi}{10} + (n-1)\frac{\pi}{5}$.

Assim, vem que $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

$$\Leftrightarrow 6000\pi = \frac{\frac{101\pi}{10} + \frac{101\pi}{10} + (n-1)\frac{\pi}{5}}{2} \times n$$

$$\Leftrightarrow 12000\pi = \left(\frac{202\pi}{10} + (n-1)\frac{\pi}{5}\right) \times n$$

$$\Leftrightarrow 12000\pi = \left(\frac{101\pi}{5} + \frac{\pi}{5}n - \frac{\pi}{5}\right) \times n$$

$$\Leftrightarrow 60\,000\pi = 100\pi n + \pi n^2$$

$$\Leftrightarrow \pi n^2 + 100\pi n - 60000\pi = 0$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 100n - 60000 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-100 \pm \sqrt{(100)^2 - 4 \times (-60000)}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-100 \pm 500}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad n = \dfrac{-100-500}{2} \quad \vee \quad n = \dfrac{-100+500}{2} \quad \Leftrightarrow n = -300 \vee n = 200$

Como, $n \in \mathbb{N}$, $n = 200$. A função f tem 200 zeros.

③ Comecemos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = (4 - x + 2\ln(x-1))' = (4)' - (x)' + (2\ln(x-1))'$$

$$= 0 - 1 + 2(\ln(x-1))' = -1 + 2\frac{(x-1)'}{x-1}$$

$$= -1 + \frac{2}{x-1}$$

Calculando os zeros da derivada da função g, tem-se que:

$$-1 + \frac{2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)+2}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x+1+2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow -x+3=0 \wedge x-1 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = 3$$

Ora, $x \in]1, +\infty[$, pelo que 3 é o zero da função g'.

Como A é o ponto do gráfico da função g de ordenada máxima, podemos concluir que a abcissa do ponto A é 3, pelo que, a sua ordenada é $g(3)$.

Ora, $g(3) = 4 - 3 + 2\ln(3-1) \Leftrightarrow g(3) = 1 + 2\ln(2)$.

Logo, $A(3, 1 + 2\ln(2))$.

Sabe-se que a abcissa do ponto B é 5 e como este ponto pertence ao gráfico da função g, a sua ordenada é igual a $g(5)$.

Assim, $g(5) = 4 - 5 + 2\ln(5-1) = -1 + 2\ln 4$

Logo, $B(5, -1 + 2\ln(4))$.

Imediatamente, conclui-se que $C(5,0)$ e $D(3,0)$.

Portanto, Área trapézio $[ABCD] = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{CD}$

$$= \frac{y_A + y_B}{2} \times (x_C - x_D)$$

$$= \frac{(1+2\ln 2) + (-1+2\ln 4)}{2} \times (5-3)$$

$$= \frac{2\ln 2 + 2\ln 4}{2} \times 2$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln 4 = 2\ln 2 + 2\ln 2^2 = 2\ln 2 + 4\ln 2$$
$$= 6\ln 2.$$

A área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $6\ln(2)$.

4 Ordenando os dados por ordem crescente, temos:

$\ln(a^3)$; $\ln(a^2)$; $\ln(a)$; $\ln(\sqrt[3]{a^2})$; $\ln(\sqrt{a})$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{a^2}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{a^3}\right)$.

Assim, vem que a amplitude é:

$$\ln\left(\frac{1}{a^3}\right) - \ln(a^3) = \ln\left(\frac{\frac{1}{a^3}}{a^3}\right) = \ln\left(\frac{1}{a^6}\right).$$

A mediana é: $\tilde{x} = \dfrac{\ln(\sqrt[3]{a^2}) + \ln(\sqrt{a})}{2}$

$$\Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{\ln(\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a})}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{\ln(a^{2/3} \times a^{1/2})}{2}$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{\ln(a^{7/6})}{2} \Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{7}{6} \times \frac{1}{2}\ln a$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x} = \frac{7}{6} \times \ln(\sqrt{a})$$

A média é:

$$\bar{x} = \frac{\ln(a^3) + \ln(a^2) + \ln(a) + \ln(\sqrt[3]{a^2}) + \ln(\sqrt{a}) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) + \ln\left(\frac{1}{a^3}\right)}{8}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\ln\left(a^3 \times a^2 \times a \times \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a} \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^3}\right)}{8}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\ln(\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a})}{8} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{\ln(a^{2/3} \times a^{1/2})}{8} \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{8} \times \frac{7}{6}\ln(a)$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{6}\ln a \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{7}{24}\ln(\sqrt{a}).$$

Assim, $I \to e)$
$II \to b)$
$III \to a)$

5 Ora, $P(\bar{A} \mid (A \cup B)) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\bar{A} \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow P((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)) = \frac{1}{5} P(A \cup B)$

$\Leftrightarrow P(\emptyset \cup (\bar{A} \cap B)) = \frac{1}{5} P(A \cup B)$

$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{5} P(A \cup B)$

• $P(B \mid A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{2} P(A)$

Observando que um número é múltiplo de 6 se for simultaneamente múltiplo de 3 e 2, ou seja, se for múltiplo de 3 e par, vem que $C = A \cap B$

Logo, $P(C) = P(A \cap B)$, portanto $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$.

Assim, vem que $P(B \cap A) = \frac{1}{2} P(A) \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{2} P(A) \Leftrightarrow \frac{4}{5} = P(A)$

Logo,

$P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(B \cap A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{5} P(A \cup B) + \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{5} (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) + \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} + P(B) - \frac{2}{5} \right) + \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{5} \left(\frac{2}{5} + P(B) \right) + \frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{25} + \frac{1}{5} P(B) + \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5} P(B) = \frac{12}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{12}{25} \times \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{5}$

6 6.1 Temos 4 casos a considerar, a saber:

– o prato quente será o primeiro prato a ser escolhido, seguido do Gunkan e logo a seguir o Temaki. Os restantes 3 itens podem ser escolhidos de 3!

maneiras diferentes.

- Pedir o Gunkan em 3º lugar e o Temaki em 4º. Pelo que o prato quente pode ser pedido em duas posições diferentes, ou a 1ª ou a 2ª, e para cada uma destas posições, os restantes 3 itens podem ser pedidos de 3! maneiras diferentes, portanto, este pedido poderá ser feito de 2×3! maneiras diferentes.

- Pedir o Gunkan em 4º lugar e o Temaki em 5º lugar, logo o prato quente pode ser pedido em 3 posições diferentes e, para cada uma destas, os restantes 3 itens podem ser pedidos de 3! maneiras diferentes, portanto este pedido poderá ser feito de 3×3! maneiras diferentes.

- Pedir o Gunkan em 5º lugar e o Temaki em 6º lugar, logo o prato quente pode ser pedido em 4 posições diferentes e, para cada uma destas, os restantes 3 itens podem ser pedidos de 3! maneiras diferentes, portanto este pedido poderá ser feito de 4×3! maneiras diferentes.

Portanto, o número de maneiras diferentes de fazer o pedido é dado pela seguinte expressão:

$$3! + 2 \times 3! + 3 \times 3! + 4 \times 3! = 60$$

Resposta: Opção (C)

6.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um item do menu deste restaurante e os acontecimentos:

C: "O Prato tem camarão"

Q: "É um prato Quente"

Tem-se: $P(Q) = 0{,}4$; $P(C|Q) = 0{,}6$; $P(\overline{Q} \cap C) = 0{,}18$.

Pretende-se determinar $P(\overline{C})$.

Ora, $P(C|Q) = \dfrac{P(C \cap Q)}{P(Q)} \Leftrightarrow 0{,}6 = \dfrac{P(C \cap Q)}{0{,}4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(C \cap Q) = 0{,}6 \times 0{,}4 \Leftrightarrow P(C \cap Q) = 0{,}24$

Por outro lado, $P(C) = P(C \cap Q) + P(C \cap \overline{Q})$

$\Leftrightarrow P(C) = 0{,}24 + 0{,}18$

$\Leftrightarrow P(C) = 0{,}42$

Logo $P(\overline{C}) = 0{,}58$ e a probabilidade pedida é 58%.

7 7.1 Como o gráfico da função f admite uma assíntota horizontal, quando $x \to -\infty$, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-6} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-6} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{6}{x}} = \frac{-\sqrt{3+\frac{1}{(-\infty)^2}}}{3-\frac{6}{-\infty}} = \frac{-\sqrt{3+0}}{3-0} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resposta: Opção (D)

7.2. Como $1 \in D_f$, $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe se e só se

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x).$$

Ora, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{3 \times 1^2+1}}{3 \times 1 - 6} = \frac{\sqrt{4}}{-3} = -\frac{2}{3}$.

Por outro lado, $\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$$= \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2} - \frac{k}{3} \right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\frac{k}{3} + \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$$

Considerando $y = x-1$, temos $x = y+1$ e se $x \to 1^+$, então $y \to 0^+$.

Assim, vem que:

$$-\frac{k}{3} + \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{(y+1)^2+(y+1)-2} = -\frac{k}{3} + \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y^2+2y+1+y+1-2}$$

$$= -\frac{k}{3} + \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y^2+3y} = -\frac{k}{3} + \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y(y+3)} =$$

$$= -\frac{k}{3} + \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y+3} = -\frac{k}{3} + 1 \times \frac{1}{0+3} =$$

$$= -\frac{k}{3} + \frac{1}{3}$$

Portanto, $-\frac{k}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$-k+1 = -2 \Leftrightarrow -k = -3 \Leftrightarrow k = 3.$

8) Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada da função f.

$$f''(x) = \left(\frac{\sin x}{2-\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(2-\cos x) - \sin x\,(2-\cos x)'}{(2-\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,(2-\cos x) - \sin x\,(\sin x)}{(2-\cos x)^2}$$

$$= \frac{2\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(2-\cos x)^2} = \frac{2\cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x)}{(2-\cos x)^2} =$$

$$= \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$$

Determinando os zeros da função f'' vem que:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \wedge (2-\cos x)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \wedge 2-\cos x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \wedge \cos x \neq 2$

A condição $\cos x \neq 2$ é universal em $\mathbb{R}$, pelo que:

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in]0, \pi[$, então o zero da função f'' é $\frac{\pi}{3}$.

Assim, estudando a variação do sinal da função f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico da função f, vem:

x	0		$\pi/3$		π
f''	N.D.	$+$	0	$-$	N.D.
f	N.D.	$\cup$	$f(\pi/3)$	$\cap$	N.D.

Logo, podemos concluir que o gráfico da função f:

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, \frac{\pi}{3}]$;

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[\pi/3, \pi[$;

- tem um único ponto de inflexão cuja abcissa é $\pi/3$.

9

· Como $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + 3x) = 4$, então, a reta de equação $y = -3x + 4$, ou seja, $y + 3x - 4 = 0$ é uma equação da assíntota ao gráfico de f quando x tende para $+\infty$, pelo que a afirmação I é falsa.

· Sabe-se que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe e é negativo, para qualquer nº real, isto é, $f'(a) \in \mathbb{R}^-, \forall a \in \mathbb{R}$, portanto, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, consequentemente, a função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que, a afirmação II é verdadeira.

· A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que, em particular, é contínua no intervalo $[b, b+1]$, para um certo número real b e como $f(b) < 0 < f(b+1)$ ou $f(b+1) < 0 < f(b)$, dado que $f(b) \times f(b+1) < 0$, temos que, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, garante-se, no intervalo $[b, b+1]$ a existência de, pelo menos, um zero da função f, logo a afirmação III é verdadeira.

(10) Temos que no instante t_1, o valor do quadro é $V(t_1)$ e se esse instante quadriplicar, o valor do quadro é dado por $V(4t_1)$.

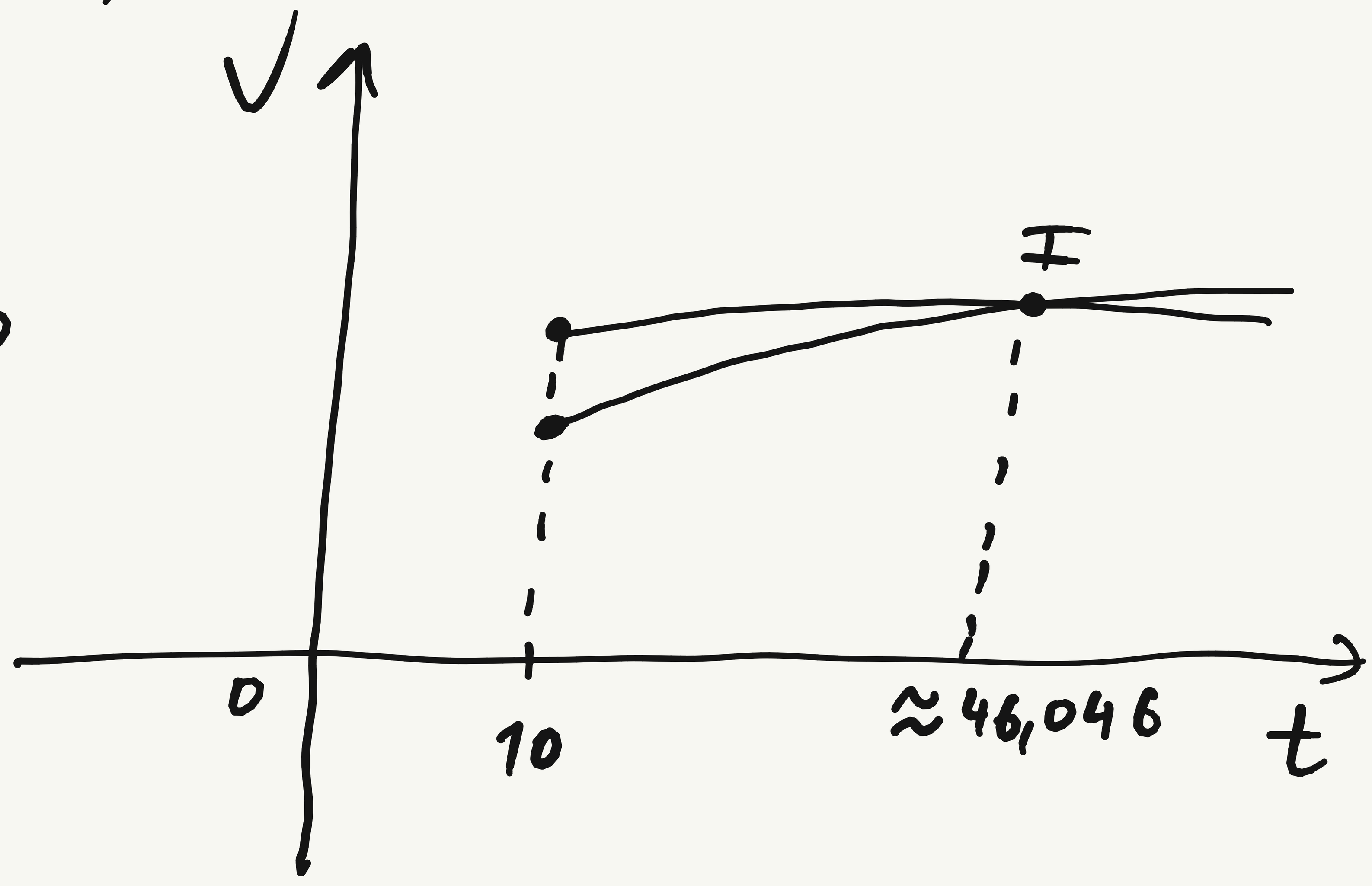
Ora, quadriplicando o instante t_1, o valor do quadro aumenta 20%, ou seja, $V(4t_1) = 1,2\,V(t_1)$.

Desta forma, simplificando a equação obtemos:

$$V(4t_1) = 1,2\,V(t_1) \Leftrightarrow 600 + 200\ln(4t_1+1) = 1,2\left(600 + 200\ln(t+1)\right).$$

Vizualizando na calculadora gráfica, os gráficos das funções, $y_1 = 600 + 200\ln(4t+1)$ e $y_2 = 1,2\left(600 + 200\ln(t+1)\right)$, para $t \geq 10$,

reproduzidos na figura ao lado e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados às milésimas do ponto de interseção dos dois gráficos, obtemos o ponto de coordenadas $I(46,046\,;\,1644,269)$.



Assim, tem-se que $t_1 \approx 46,046$, ou seja, $t_1 \approx$ 46 anos e 1 mês.

Resposta: $t_1 \approx$ 46 anos e 1 mês.

(11)

11.1. Temos que $A(1,0)$, $B(-1,0)$.

Como o ângulo ABC é um ângulo inscrito ao arco AC tem-se que $A\hat{O}C = 2\alpha$. Pelo que, $C(\cos(2\alpha), \text{sen}(2\alpha))$ e $D(\cos(2\alpha), 0)$.

A área do triângulo $[ACD]$ é então dada pela expressão

$$A(\alpha) = \frac{\overline{AD} \times \overline{CD}}{2} = \frac{(1 - x_D) \times y_C}{2} =$$

$$= \frac{(1 - \cos(2\alpha)) \times \text{sen}(2\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\left[\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right] \times 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$= 2\sin^2\alpha \times \text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 2\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha, \text{ (c.q.p).}$$

11.2 Pretende-se mostrar que $\exists c \in]0, \frac{\pi}{4}[: A(c) = 0,25$.
A função A é contínua no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ pois resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Por outro lado, $A(0) = 2\sin^3(0)\cos(0) = 0$

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin^3\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Portanto, $A(0) < 0,25 < A(\frac{\pi}{4})$, então podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy que $\exists c \in]0, \frac{\pi}{4}[: A(c) = 0,25$, ou seja, que existe pelo menos um ponto do gráfico da função A cuja ordenada é igual a 0,25.

12 $z = \frac{-9+3i}{1-2i} \Leftrightarrow z = \frac{(-9+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \frac{-9-18i+3i+6i^2}{1^2+2^2} \Leftrightarrow z = \frac{-15-15i}{5} \Leftrightarrow z = -3-3i$

- $\tan(\theta) = \frac{-3}{-3} = 1 \wedge \theta \in 3^{\underline{o}}$ Quadrante $\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$

Portanto, $Arg(z) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Temos que $i^{463}z = i^3 z = -iz$.

Logo, $Arg(-iz) = \left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Para $k=-1$, $Arg(iz) = -\frac{5\pi}{4}$

Resposta: Opção (D).

(13) Temos que $z^3 + z + 10 = 0$. Aplicando a regra de Ruffini para $z = -2$, vem que:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 1 & 10 \\ -2 & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$$z^3 + z + 10 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (z+2)(z^2 - 2z + 5) = 0$$

Logo, $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2}$

$\Leftrightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \pm 4i}{2} \Leftrightarrow z = 1 + 2i \lor z = 1 - 2i$

Assim, temos $z_0 = -2$, $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - 2i$

portanto a área do polígono é dada por:

$$\frac{|-2-1| \times |z_1 - z_2|}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6.$$

(14) Determinemos as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{BP}$.

Ora, P é um ponto pertencente à bissetriz do 1º quadrante, pelo que as suas coordenadas são da forma (p, p) com $p > 0$.

Portanto, $\overrightarrow{AP} = P - A \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = (p, p - 3k)$
$\overrightarrow{BP} = P - B \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = (p, p - k)$

Assim, temos que: $m_{AP} = \frac{p - 3k}{p}$ e $m_{BP} = \frac{p-k}{p}$

Como $A(0, 3k)$, pertence à reta AP, a equação reduzida desta reta é: $y = \frac{p - 3k}{p} x + 3k$

De modo análogo, a equação reduzida da reta BP é

$$y = \frac{p-k}{p} x + k$$

Determinemos agora as coordenadas de x_1 e x_2.

- $0 = \frac{p-3k}{p} x_1 + 3k \Leftrightarrow 0 = (p-3k)x_1 + 3kp$

$$\Leftrightarrow (p-3k)x_1 = -3kp$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{-3kp}{p-3k}$$

- $0 = \frac{p-k}{p} x_2 + k \Leftrightarrow (p-k)x_2 = -kp \Leftrightarrow x_2 = \frac{-kp}{p-k}$

Temos então que $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} =$

$$= \frac{1}{\frac{-3kp}{p-3k}} - \frac{1}{\frac{-kp}{p-k}} = \frac{p-3k}{-3kp} - \frac{p-k}{-kp} =$$

$$= \frac{3k-p}{3kp} - \frac{k-p}{kp} = \frac{3k-p}{3kp} - \frac{3k-3p}{3kp} = \frac{2p}{3kp} = \frac{2}{3k} \quad \text{(c.q.m)}$$