11.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS
FUNÇÕES

ANTÓNIO LEITE | 2025

FUNÇÕES

Funções

- Função cúbica ou função polinomial do 3º grau é toda a função definida por um polinómio de grau 3.

  O domínio desta função é $\mathbb{R}$ e é definida por uma expressão do tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sendo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Uma função f real de variável real, diz-se par quando $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = f(x)$.

  Portanto, o gráfico de uma função par tem simetria relativamente ao eixo Oy.

- Uma função f real de variável real, diz-se ímpar quando $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x)$.

  Portanto, o gráfico de uma função ímpar tem simetria de meia volta.

- O número máximo de zeros de uma função cúbica é três.

- Função quártica ou função polinomial do 4º grau é toda a função definida por um polinómio de grau 4.

  O domínio desta função é $\mathbb{R}$ e é definida por uma expressão do tipo $y = ax^4 + bx^3 + c^2x + dx + e$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

- O número máximo de zeros de uma função quártica é quatro.

- Em qualquer função quártica, o comportamento no infinito quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$ é o mesmo, isto, é se $x \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$, então $x \to +\infty$ e $f(x) \to +\infty$ ou se $x \to -\infty$ e $f(x) \to -\infty$, então $x \to +\infty$ e $f(x) \to -\infty$.

- Zeros e comportamento no infinito

  Sejam f uma função polinomial de grau n e ax^n, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, o seu termo de maior grau, então:

  - a função f e o termo de maior grau ax^n têm o mesmo comportamento no infinito;
  - a função f tem no máximo, n zeros reais;
  - se n for ímpar, f tem, pelo menos, um zero real.

- Duas funções f e g reais de variável real, dizem-se iguais se e só se $D_f = D_g \wedge f(x) = g(x),\ \forall x \in D_f$.

Divisão inteira de polinómios

Dados os polinómios $A(x)$ e $B(x)$ o algoritmo de divisão inteira de polinómios permite determinar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ dessa divisão, tais que:

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x).$$

$A(x)$ e $B(x)$ dizem-se polinómio dividendo e polinómio divisor, respetivamente.

- $R(x)$ é o polinómio resto e ou é o polinómio nulo ou tem grau inferior ao grau do polinómio dividendo $B(x)$.

- Um polinómio $A(x)$ é divisível pelo polinómio $B(x)$, quando o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.

  Neste caso, resulta, imediatamente que $A(x) = B(x) \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ o polinómio quociente.

- Regra de Ruffini / Algoritmo de Horner:

  Sejam $A(x)$ e $B(x)$ dois polinómios, tais que, o grau de $A(x)$ é superior ou igual ao grau de $B(x)$.

  O Algoritmo de Horner permite determinar os coeficientes dos polinómios $Q(x)$ e $R(x)$, respetivamente, quociente e resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.

  No caso particulaar do polinómio $B(x)$ ser do tipo $x - \alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, o algoritmo é conhecido por Regra de Ruffini.

- Teorema do resto:

  Dado um polinómio $P(x)$ e um número real α, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - \alpha$ é igual a $P(\alpha)$.

  Assim, é imediato concluir que $P(x)$ é divisível por $x - \alpha$ se e só se $P(\alpha) = 0$. E, neste caso, α diz-se raiz do polinómio $P(x)$.

- A decomposição de um polinómio em fatores consiste em representá-lo na forma de produto de polinómios.

- Uma raiz α de um polinómio $P(x)$ tem multiplicidade k quando k é o maior número natural, diferente de zero, para o qual $P(x)$ é divisível por $(x - \alpha)^k$, com $k \geq 1$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$.

- Um polinómio de grau n tem, no máximo, n raízes reais diferentes.

- Sendo $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b, c \in \mathbb{R}$, se α_1 e α_2 são raízes iguais ou distintas de $P(x)$, então
$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2).$$

- Sendo $P(x)$ um polinómio de grau n, sendo $n \in \mathbb{Z}^+$, com k raízes distintas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ de multiplicidades $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, respetivamente, então $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k \leq n$ e existe um polinómio $Q(x)$, sem raízes reais, tais que
$$P(x) = (x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2}(x - \alpha_3)^{n_3} \ldots (x - \alpha_k)^{n_k} Q(x)$$

- Se $P(x)$ é um polinómio de coeficientes inteiros, então, as suas raízes inteiras, caso existam, pertencem ao conjunto dos divisores positivos e negativos do termo independente de $P(x)$.

Equações e inequações de grau superior ao segundo

Seja $P(x)$ um polinómio de grau superior a 2, tem-se que:

- para resolver uma equação do tipo $P(x) = 0$ fatoriza-se $P(x)$ e aplica-se a lei do anulamento de produto.
- para resolver uma inequação do tipo $P(x) > 0, P(x) \geq 0$, $P(x) < 0$ ou $P(x) \leq 0$, fatoriza-se $P(x)$ e estuda-se o sinal dos seus fatores, recorrendo, normalmente a uma tabela de sinais.

Operações com funções

Dadas duas funções f e g, reais de variável real, designa-se por:

- Função soma de f com g à função $f + g$, de domínio $D = D_f \cap D_g$ e definida por
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$
- Função diferença entre f e g à função $f - g$, de domínio $D = D_f \cap D_g$ e definida por
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x).$$
- Função produto de f por g à função $f \times g$, de domínio $D = D_f \cap D_g$ e definida por
$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x).$$
- Função quociente de f por g à função $\frac{f}{g}$, de domínio $D = (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in D_g : g(x) = 0\}$ e definida por
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Funções racionais

Uma função f, real de variável real, chama-se racional se é definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómio com $Q(x)$ diferente de zero.

O domínio de f é o conjunto $\{x \in R : Q(x) \neq 0\}$.

- Funções do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, c \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  - $D_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$
  - $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$
  - Equação da assíntota vertical: $x = c$.
    Nota: A reta de equação $x = c$ é uma assíntota vertical ao gráfico de uma função f quando $f(x)$ tende para $+\infty$ ou para $-\infty$, quando $x \to c$ por valores à esquerda ou à direita ou ambos.
  - Equação da assíntota horizontal: $y = a$.
    Nota: A reta de equação $y = a$ $(a \in \mathbb{R})$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de uma função f quando $f(x)$ tende para a, quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$ ou ambos.

- Se $b > 0$, a função f é estritamente descrescente em $]-\infty, c[$ e em $]c, \infty[$.
- Se $b > 0$, a função f é estritamente crescente em $]-\infty, c[$ e em $]c, \infty[$.

- Zeros de uma função racional do tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \wedge Q(x) \neq 0.$$

Portanto, f tem tantos zeros quantos os zeros de $P(x)$ desde que estes não sejam zeros de $Q(x)$.

- Para resolver uma inqueção fracionária recorre-se, normalmente, a uma tabela de sinais.

Derivadas

- A taxa média de variação de uma função no intervalo $[a, b]$:

$$\text{t.m.v}_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

A taxa média de variação de uma função f no intervalo $[a, b]$ é igual ao declive da reta secante ao gráfico da função f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$.

- Derivada de uma função num ponto

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{ou} \quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Se f admite derivada em $x = x_0$, diz-se que f é derivável ou diferenciável em x_0.
- A derivada de f em x_0 é a taxa de variação instantânea em $x = x_0$.

- Se f é derivável em x_0, com $x_0 \in D_f$, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 é igual a $f'(x_0)$.

- Reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

onde $m = f'(x_0)$.

- Uma função f diz-se diferenciável num conjunto A quando é diferenciável em todos os pontos de A.

- Regras de derivação

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$, $k \in \mathbb{R}$
- $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$
- $(x^n)' = n \times x^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}^+$
- $(f^n)' = n \times f^{n-1} f'$, $n \in \mathbb{Z}^+$

Notas:

- $k' = 0,\ k \in \mathbb{R}$
- $(kx)' = k, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $(x^2)' = 2x$
- $(x^3) = 3x^2$

Sinal da derivada de uma função e extremos locais

Seja f uma função definida em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$, com $a < b$.

- Se f é crescente em $]a, x_0]$ e decrescente em $[x_0, b[$, então a função f tem um máximo relativo no ponto de abcissa x_0.

  $f(x_0)$ é esse máximo relativo e x_0 é o respetivo maximizante.

- Se f é decrescente em $]a, x_0]$ e crescente em $[x_0, b[$, então a função f tem um mínimo relativo no ponto de abcissa x_0.

  $f(x_0)$ é esse mínimo relativo e x_0 é o respetivo minimizante.

Diferenciabilidade e extremos

- Teorema de Fermat:

  Sejam f uma função definida em $I =]a, b[$ e $x_0 \in]a, b[$.

  Se f é diferenciável em x_0 e tem um extremo em x_0, então, $f'(x_0) = 0$.

Sinal da derivada e monotonia de uma função

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b] \subset D$, com $a < b$.

- Se $\forall x_0 \in]a, b[,\ f'(x_0) > 0$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.
- Se $\forall x_0 \in]a, b[,\ f'(x_0) < 0$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.
- Se $\forall x_0 \in]a, b[,\ f'(x_0) = 0$, então f é constante em $[a, b]$.