



10.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS FUNÇÕES

ANTÓNIO LEITE | 2025

FUNÇÕES

Generalidades acerca de funções

- Uma função pode ser representada de diversas formas: diagramas, tabelas, gráficos e expressões analíticas.
- Dados os conjuntos A e B , fica definida uma função f de A para B quando a cada elemento x , do conjunto A , se associa um e um só elemento y do conjunto B que se representa, normalmente, por $f(x)$, ou seja, $y = f(x)$.

A função f designa-se por $f : A \rightarrow B$.

- Domínio de uma função $f : A \rightarrow B$ é o conjunto dos elementos de A . Representa-se por D_f .
- Contradomínio de uma função $f : A \rightarrow B$ é o conjunto dos elementos de B que estão associados por elementos de A . Representa-se por D'_f .
- O conjunto de chegada de uma função $f : A \rightarrow B$ é o conjunto dos elementos de B .
- Os elementos do domínio designam-se por objetos.
- Os elementos do contradomínio designam-se por imagens.
- Dada a função $f : A \rightarrow B$ tal que $x \in A$ e $y = f(x) \in B$, a variável independente é x e a variável dependente é y .

Zeros e sinal de uma função

- Sendo $a \in D_f$, a é zero da função f se e só se $f(a) = 0$.

Graficamente os zeros da função f são as abcissas dos pontos de interseção do gráfico da função f com o eixo das abcissas (eixo Ox).

- Dada uma função f de domínio D e um subconjunto $A \subseteq D$, tem-se que:
 - f é positiva em A se e só se $f(x) > 0$, $\forall x \in A$.
 - f é negativa em A se e só se $f(x) < 0$, $\forall x \in A$.

Extremos de uma função

- Dada uma função f , real de variável real, de domínio D e $a \in D$, $f(a)$ é um:
 - máximo absoluto da função f se $\forall x \in D$, $f(a) \geq f(x)$.
 - mínimo absoluto da função f se $\forall x \in D$, $f(a) \leq f(x)$.
 - máximo relativo da função f quando existir $r > 0$, tal que, $\forall x \in D \cap V_r(a)$, $f(a) \geq f(x)$.
 a é um maximamente da função f .

Nota: $V_r(a) =]a - r, a + r[$ designa-se por vizinhança de centro a e raio r .

- mínimo relativo da função f quando existir $r > 0$, tal que $\forall x \in D \cap V_r(a), f(a) \leq f(x)$.
 a é minimizante da função f .

Monotonia de uma função

- Os intervalos de monotonia de uma função são os intervalos do domínio dessa função de maior amplitude em que a função é crescente, decrescente ou constante.
- Para organizar o sinal de uma função, pode, construir-se uma tabela de sinal da função.
- Dada uma função f , real de variável real e $A \subseteq D_f$, então:
 - f é crescente em A se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 - f é decrescente em A se $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 - f é decrescente em A se $\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$
- Para organizar o estudo da monotonia de uma função, pode, construir-se uma tabela de variação da função.

Função afim

Uma função f de domínio $\mathbb{R}$, diz-se afim se existirem números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$.

A representação gráfico de uma função afim é uma reta, não vertical, definida pela expressão $y = ax + b$, onde:

- a é o declive da reta;
- b é a ordenada na origem (ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas, isto é, o eixo Oy).

Se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b = 0$, então, $y = ax$ e a função diz-se linear. A sua representação é uma reta não vertical, nem horizontal, que passa pela origem do referencial.

Se $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$, então $y = b$ e a função diz-se constante. A sua representação é uma reta horizontal.

Monotonia de uma função afim

Seja f a função afim definida por $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$:

- Se $a > 0$, então f é crescente em $\mathbb{R}$.
- Se $a < 0$, então f é decrescente em $\mathbb{R}$.

Zeros de uma função afim

Uma função afim não constante tem um e um só zero.

Uma função constante pode não ter qualquer zero ou uma infinidade de zeros.

No caso de $y = b$, com $b \neq 0$, não existem zeros, já no caso de $y = b$, com $b = 0$, a função tem uma infinidade de zeros.

Sinal de uma função afim

- Sendo f uma função afim definida por $f(x) = b$, temos
 - Se $b > 0$, $\forall x \in D_f$, $f(x) > 0$.
 - Se $b < 0$, $\forall x \in D_f$, $f(x) < 0$.
 - Se $b = 0$, $\forall x \in D_f$, $f(x) = 0$.
- No caso de f ser definida por $f(x) = ax + b$.
 - Se $a > 0$, para qualquer $x \in \left] -\infty, -\frac{b}{a} \right[$, $f(x) < 0$.
 - Se $a > 0$, para qualquer $x \in \left] -\frac{b}{a}, +\infty \right[$, $f(x) > 0$.
 - Se $a < 0$, para qualquer $x \in \left] -\infty, -\frac{b}{a} \right[$, $f(x) > 0$.
 - Se $a < 0$, para qualquer $x \in \left] -\frac{b}{a}, +\infty \right[$, $f(x) < 0$.

Função quadrática

- Função quadrática do tipo $g(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ e a função f definida por $f(x) = x^2$.

O gráfico da função g , tal que $D_g = D_f$ e $g(x) = af(x)$, é a imagem do gráfico de f por uma:

- dilatação vertical de coeficiente a se $a > 1$
- contração vertical de coeficiente a se $0 < a < 1$.

O gráfico da função h , tal que $D_h = D_f$ e $h(x) = -af(x)$ é a imagem do gráfico de f por uma:

- dilatação vertical de coeficiente a se $a > 1$, seguida de uma reflexão de eixo Ox .
- contração vertical de coeficiente a se $0 < a < 1$, seguida de uma reflexão de eixo Ox .

- Função quadrática do tipo $g(x) = a(x - h)^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $h \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função g definida por $g(x) = f(x - h)$, com $h \in \mathbb{R}$ obtém-se do gráfico da função f , definida por $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deslocando este h unidades na horizontal.

- Se $h > 0$, o gráfico desloca-se h unidades para a direita.
- Se $h < 0$, o gráfico desloca-se h unidades para a esquerda.

- Função quadrática do tipo $g(x) = ax^2 + k$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função g definida por $g(x) = f(x) + k$, com $k \in \mathbb{R}$, obtém-se do gráfico da função f definida por $f(x) = ax^2$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deslocando este k unidades na vertical.

- Se $k > 0$, o gráfico desloca-se k unidades para cima.
- Se $k < 0$, o gráfico desloca-se k unidades para baixo.

- Função quadrática do tipo $g(x) = a(x - h)^2 + k$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $h, k \in \mathbb{R}$.

O gráfico da função g é uma parábola com as características seguintes:

- Vértice: $V(h, k)$.
- Eixo de simetria: reta de equação $x = h$.
- Concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.
- Se $a > 0$:
 - k é o mínimo absoluto da função g sendo h o respetivo minimizante.
 - o contradomínio da função g é $[k, +\infty[$.
- Se $a < 0$:
 - k é o máximo absoluto da função g sendo h o respetivo maximizante.
 - o contradomínio da função g é $] -\infty, k]$.

Equações e inequações do segundo grau

- Fórmula resolvente de uma equação do 2º grau

A equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é equivalente a

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O número de soluções de uma equação do 2º grau depende do sinal do bínomio discriminante, que se representa por Δ e é igual a $b^2 - 4ac$.

- Se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções reais distintas.
- Se $\Delta = 0$, a equação tem uma e uma só solução real.
- Se $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais.

- Inequações do 2º grau

Para resolver uma inequação do 2º grau pode-se usar o seguinte procedimento:

1. Escrever a inequação na forma canónica, isto é, o 1º membro na forma $ax^2 + bx + c$ e o segundo igual a zero.
2. Determinar os zeros, caso existam, da equação $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Efetuar um esboço da parábola que representa graficamente a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, atendendo aos zeros, caso existam, e ao sinal de a .
4. Concluir o pedido e responder escrevendo o conjunto solução da inequação.

Funções definidas por ramos

Uma função está definida por ramos quando é definida por expressões álgebras diferentes, em partes do domínio diferentes.

Função Módulo

A função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

é designada por função módulo.