10.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO E NO ESPAÇO

ANTÓNIO LEITE | 2025

GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO

Referenciais cartesianos no plano

Um referencial cartesiano xOy diz-se ortogonal monométrico (o.m.) se:

- os eixos coordenados Ox e Oy são perpendiculares (referencial perpendicular).
- as unidades de comprimento definidas para cada eixo coordenado são iguais (referencial monométrico).

Quadrantes

Seja $P(x,y)$ um ponto do plano. Temos:

- $P(x,y) \in 1^{\text{o}}\ Q$ se e só se $x > 0 \wedge y > 0$.
- $P(x,y) \in 2^{\text{o}}\ Q$ se e só se $x < 0 \wedge y > 0$.
- $P(x,y) \in 3^{\text{o}}\ Q$ se e só se $x < 0 \wedge y < 0$.
- $P(x,y) \in 4^{\text{o}}\ Q$ se e só se $x > 0 \wedge y < 0$.
- $P(x,y) \in Ox$ se e só se $y = 0$.
- $P(x,y) \in Oy$ se e só se $x = 0$.
- Q é o transformado de P pela reflexão de eixo vertical r, se as retas PQ e r são perpendiculares e as distâncias de P e Q à reta r são iguais.
- R é o transformado de P pela reflexão de eixo horizontal s, se as retas PR e s são perpendiculares e as distâncias de P e R à reta s são iguais.
- T é o transformado de P pela rotação de meia volta de centro O, se distância de O e P é igual à distância de O a T e a amplitude do ângulo orientado POT é igual a $180°$.

Nota: $P(x,y)$ coincide com a origem do referencial e pertence tanto ao eixo Ox como ao eixo Oy se e só se $x = 0 \wedge y = 0$.

Distância entre dois pontos

Sejam A e B os pontos de coordenadas $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ponto Médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Equação reduzida da circunferência de centro $C(x_C, y_C)$ e raio r

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$

Inequação reduzida do círculo de centro $C(x_C, y_C)$ e raio r

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \leq r^2$$

Vetores colineares $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{t}(t_1, t_2)$ de coordenadas não nulas:

- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$ são colineares se e só se existe um número real, $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{u} = \lambda\vec{t}$.
- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$ são ainda colineares se e só se $\frac{u_1}{t_1} = \frac{u_2}{t_2} \Leftrightarrow u_1 \times t_2 = u_2 \times t_1$.

Nota:

- $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{t}(0, t_2)$ são colineares se e só se $u_1 = 0$
- $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{t}(t_1, 0)$ são colineares se e só se $u_2 = 0$

Norma de um vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

Vetor como diferença de dois pontos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A \\ &= (x_B - x_A, y_B - y_A)\end{aligned}$$

Soma de um ponto $A(x_A, y_A)$ com um vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$

$$\begin{aligned}P &= A + \vec{u} \\ &= (x_A + u_1, y_A + u_2)\end{aligned}$$

Vetor diretor e declive de um reta não vertical

Seja $\vec{r}(r_1, r_2)$ um vetor diretor da reta r, então o seu declive é $m = \frac{r_2}{r_1}$.

Equações de uma reta:

- $x = a \rightarrow$ reta vertical que passa pelo ponto de abcissa a
- $y = b \rightarrow$ reta horizontal que passa pelo ponto de ordenada b
- Reduzida: $y = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$

  m - declive

  b - ordenada na origem
- Vetorial: $(x, y) = (x_0, y_0) + k(r_1, r_2),\ k \in \mathbb{R}$

  (x_0, y_0) - Ponto Conhecido

  (r_1, r_2) - Vetor Diretor

Relação entre o declive de duas retas não verticais paralelas

Sejam $r : y = m_r x + b_r$ e $s : y = m_s x + b_s$, tem-se então:

$$r \,//\, s \text{ se e só se } m_r = m_s$$

GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

Referenciais no espaço

Um referencial cartesiano $Oxyz$ diz-se ortogonal monométrico (o.m.) se:

- os eixos coordenados são perpendiculares dois a dois, isto é, $Ox \perp Oy$ e $Ox \perp Oz$ e $Oy \perp Oz$.
- a unidade de medida de comprimento é igual nos três eixos coordenados.

Octantes

Seja $P(x, y, z)$ um ponto do espaço. Temos:

- $P(x, y, z) \in 1^{\text{o}}$ Octante se e só se $x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$.
- $P(x, y, z) \in 2^{\text{o}}$ Octante se e só se $x < 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0$.
- $P(x, y, z) \in 3^{\text{o}}$ Octante se e só se $x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$.
- $P(x, y, z) \in 4^{\text{o}}$ Octante se e só se $x > 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$.
- $P(x, y, z) \in 5^{\text{o}}$ Octante se e só se $x > 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0$.
- $P(x, y, z) \in 6^{\text{o}}$ Octante se e só se $x < 0 \wedge y > 0 \wedge z < 0$.
- $P(x, y, z) \in 7^{\text{o}}$ Octante se e só se $x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$.

- $P(x,y,z) \in 8^{\text{º}}$ Octante se e só se $x > 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$.
- $P(x,y,z) \in Ox$ se e só se $y = 0 \wedge z = 0$.
- $P(x,y,z) \in Oy$ se e só se $x = 0 \wedge z = 0$.
- $P(x,y,z) \in Oz$ se e só se $x = 0 \wedge y = 0$.
- $P(x,y,z) \in$ plano xOy se e só se $z = 0$.
- $P(x,y,z) \in$ plano xOz se e só se $y = 0$.
- $P(x,y,z) \in$ plano yOz se e só se $x = 0$.

Nota: $P(x,y,z)$ coincide com a origem do referencial e pertence a qualquer dos eixos coordenados ou a qualquer plano coordenado se e só se $x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0$.

Interseções

Interseção de uma superfície esférica com um plano paralelo a um dos planos coordenados pode ser:

- um ponto
- o conjunto vazio
- uma circunferência

Interseção de uma esfera com um plano paralelo a um dos planos coordenados pode ser:

- um ponto
- o conjunto vazio
- um círculo

Equações dos planos tangentes a uma superfície esférica definida pela equação

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

- □ $x = a + r \wedge x = a - r$ ($/\!/ \, yOz$ ou $\perp$ eixo Ox).
- □ $y = b + r \wedge y = b - r$ ($/\!/ \, xOz$ ou $\perp$ eixo Oy).
- □ $z = c + r \wedge z = c - r$ ($/\!/ \, xOy$ ou $\perp$ eixo Oz).

Planos paralelos aos planos coordenados

Planos coordenados	Equações
xOy	$z=0$
xOz	$y=0$
yOz	$x=0$

- $z=c \rightarrow$ equação de um plano paralelo a xOy em que todos os pontos têm a mesma cota c.
- $y=b \rightarrow$ equação de um plano paralelo a xOz em que todos os pontos têm a mesma ordenada b.
- $x=a \rightarrow$ equação de um plano paralelo a yOz em que todos os pontos têm a mesma abcissa a.

Retas paralelas aos eixos coordenados

Eixos coordenados	Condições
Ox	$y=0 \wedge z=0$
Oy	$x=0 \wedge z=0$
Oz	$x=0 \wedge y=0$

- $y=b \wedge z=c \rightarrow$ reta paralela ao eixo Ox em que todos os pontos têm a mesma ordenada b e a mesma cota c.
- $x=a \wedge z=c \rightarrow$ reta paralela ao eixo Oy em que todos os pontos têm a mesma abcissa a e a mesma cota c.
- $x=a \wedge y=b \rightarrow$ reta paralela ao eixo Oz em que todos os pontos têm a mesma abcissa a e a mesma ordenada b.

Distância entre dois pontos do espaço

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Plano Mediador de $[AB]$

- Equação Cartesiana: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2+(z-z_B)^2$
- Equação Geral: $ax+by+cz+d=0,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$

Equação reduzida da superfície esférica de centro C e raio r

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2=r^2$$

Inequação reduzida da esfera de centro C e raio r

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2 \leq r^2$$

Ponto médio de $[AB]$

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

Vetores colineares $\vec{u}$ e $\vec{t}$ de coordenadas não nulas:

- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$ são colineares se e só se existe um número real, $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{u}=\lambda\vec{t}$.
- Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{t}$ são ainda colineares se e só se $\frac{u_1}{t_1}=\frac{u_2}{t_2}=\frac{u_3}{t_3}$.

Nota:

  - Se $\vec{u}$ tem exatamente 2 coordenadas nulas, então $\vec{t}$ tem as coordenadas correspondentes nulas.
  - Se $\vec{u}$ tem uma e uma só coordenada nula, então $\vec{t}$ tem a coordenada correspondente também nula.

Norma de um vetor $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2+(u_3)^2}$$

Vetor como diferença de dois pontos:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=B-A\\&=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)\end{aligned}$$

Soma de um ponto $A(x_A,y_A,z_A)$ com um vetor $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$

$$\begin{aligned}P&=A+\vec{u}\\&=(x_A+u_1,y_A+u_2,z_A+u_3)\end{aligned}$$

Equações de retas do espaço

- Vetorial: $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+k(r_1,r_2,r_3),\ k\in\mathbb{R}$

  (x_0,y_0,z_0) - Ponto Conhecido

  (r_1,r_2,r_3) - Vetor Diretor