11.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS
MATEMÁTICA DISCRETA

ANTÓNIO LEITE | 2025

MATEMÁTICA DISCRETA

Contagem

- Princípio do pombal ou princípio das gavetas de Dirichlet: Se em n gavetas forem colocados $n+1$ objetos, então pelo menos uma das gavetas conterá pelo menos dois objetos.
- Princípio da adição: Se uma tarefa pode ser realizada de n_1 maneiras, uma segunda tarefa pode ser realizada de n_2 maneiras e estas tarefas são mutuamente exclusivas, isto é, ou se realiza uma delas ou se realiza a outra, então, há $n_1 + n_2$ maneiras de realizar uma dessas tarefas.
- Princípio da multiplicação: Quando é necessário realizar k escolhas sucessivas, em que há n_1 opções, na segunda há n_2 opções, na terceira há n_3 opções, ... e na escolha de ordem k há n_k opções, então o número total de opções é dado por $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.
- Fatorial de um número natural n ($n!$)

  $$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1,$$

  para $n \geq 1 \wedge n \in \mathbb{N}$. Se $n = 0$, por convenção, $0! = 1$.
- Arranjos com repetição: Interessa a ordem dos elementos e estes podem repetir-se.

  $$^{n}A'_{p} = n^{p}$$

- Arranjos sem repetição: Interessa a ordem dos elementos e estes não se podem repetir, mas não entram todos na sequência.

  $$^{n}A_{p} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

- Permutações de n elementos: Interessa a ordem dos elementos e estes não se podem repetir, mas entram todos na sequência.

  $$P_n = {}^{n}A_{n} = n!$$

- Combinações: Não interessa a ordem dos elementos e estes não se podem repetir.

  $$^{n}C_{p} = \frac{^{n}A_{p}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

PLANO ALPHA

Sucessões

- Uma sucessão de números reais (u_n) é uma função, u, em que o domínio é o conjunto dos números naturais exceto o zero, isto é, $\{1,2,3,4,\dots\}$, e o conjunto de chegada é o conjunto dos números reais, isto é, $\mathbb{R}$.
- Numa sucessão definida por recorrência é dado o primeiro termo (ou os primeiros termos, sejam os dois primeiros, os três primeiros, ...) e uma relação que permite calcular um termo a partir de um ou vários termos precedentes.
- Progressões aritméticas
  - Definição: A progressão aritmética (u_n) de primeiro termo $u_1 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, e razão $r \in \mathbb{R}$ é definida por recorrência do modo que se segue:
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
  - Termo geral
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_1 + (n-1) \times r \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_k + (n-k) \times r$$
  - Soma dos n primeiros termos
$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$
  - A soma S, dos termos compreendidos entre os termos de ordem p e de ordem k, com $p < k$, é
$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_k \Leftrightarrow S = S_k - S_{p-1} \Leftrightarrow S = \frac{u_p + u_k}{2} \times (k - p + 1).$$
- Progressões geométricas
  - Definição: A progressão geométrica (v_n) de primeiro termo $v_1 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, e razão $r \in \mathbb{R}$ é definida por recorrência do modo que se segue:
$$\begin{cases} v_1 = a \\ v_{n+1} = v_n \times r, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
  - Termo geral
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_1 \times r^{n-1} \quad \text{ou} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_k \times r^{n-k}$$
  - Soma dos n primeiros termos
$$S_n = v_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$
  - A soma $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_k$ é equivalente a
$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_k \Leftrightarrow S = S_k - S_{p-1} \Leftrightarrow S = u_p \times \frac{1 - r^{k-p+1}}{1 - r}$$
  - A soma S infinita de uma progressão geométrica com $|r| < 1$ é dada por
$$S = \frac{u_1}{1 - r}.$$

PLANO ALPHA