



12.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS NÚMEROS COMPLEXOS

NÚMEROS COMPLEXOS

Forma algébrica

$$z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$$

- a é a parte real de z ; $\text{Re}(z) = a$;
- bi é a parte imaginária de z ;
- b é o coeficiente da parte imaginária de z ; $\text{Im}(z) = b$;
- z é um número real se e só se $\text{Im}(z) = 0$;
- z é um imaginário puro se e só se $\text{Re}(z) = 0 \wedge \text{Im}(z) \neq 0$;
- $P(a, b)$ é o afixo ou imagem geométrica de z .

Potências de base i

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Temos portanto que, $i^n = i^r$, sendo n um número inteiro não negativo e r o resto da divisão inteira de n por 4.

Nota: $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

Equações polinomiais em $\mathbb{C}$

Uma equação do 2º grau tem sempre, pelo menos, uma solução em $\mathbb{C}$ (ou uma dupla ou duas distintas).

Dados $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, tem-se, em $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0 \iff z = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Uma equação do 3º grau de coeficientes reais pode ter uma (tripla), duas (em que uma é dupla) ou três (distintas) soluções em $\mathbb{C}$, sendo, pelo menos, uma real e as outras duas quando não números reais, números complexos conjugados.

Simétrico e conjugado de z

Seja $z = a + bi$

- Simétrico de z : $-z = -a - bi$
- Conjugado de z : $\bar{z} = a - bi$

Igualdade de dois números complexos na forma algébrica

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Propriedades dos números complexos conjugados

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$
- $\overline{\bar{z}} = z$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Módulo de um número complexo

Se $z = a + bi$ então $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (distância, no plano complexo, entre a origem e o afixo de z).

Quociente de dois números complexos na forma algébrica

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

Propriedades

- $|z| = |\bar{z}|$
- $|z|^2 = z \times \bar{z}$
- $|zw| = |z| \times |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$
- $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $\overline{\left(\frac{w}{z} \right)} = \frac{\bar{w}}{\bar{z}}$

Forma trigonométrica

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Onde $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o módulo de z e θ é um argumento de z ($\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ também são argumentos de z).

Ao argumento de z que pertence a $] - \pi, \pi]$ chama-se argumento principal de z e representa-se por $\text{Arg}(z)$.

Temos ainda que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ (fórmula de Euler).

Igualdade de números complexos na fórmula trigonométrica

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1|e^{i\theta_1} = |z_2|e^{i\theta_2} \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \wedge \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Simétrico e conjugado de z na forma trigonométrica

Seja $z = |z|e^{i\theta}$

- Simétrico de z : $-z = |z|e^{i(\theta+\pi)}$
- Conjugado de z : $\bar{z} = |z|e^{-i\theta}$

Operações na forma trigonométrica

- Multiplicação: $z_1 \times z_2 = (|z_1|e^{i\theta_1}) \times (|z_2|e^{i\theta_2}) = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- Potenciação: $z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$

Raízes n -ésimas de números complexos

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|e^{i\theta}} \\ &= \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

- As raízes têm todas o mesmo módulo;
- Os argumentos das n raízes estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$;
- Os afijos das raízes de ordem n ($n \in \mathbb{N} \wedge n > 2$) de um número complexo z , não nulo, são vértices de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e de raio $\sqrt[n]{|z|}$.

Transformações geométricas em $\mathbb{C}$

- O afixo de $\bar{z}$ é a imagem do afixo de z pela reflexão axial do eixo real.
- Sendo $z = x + yi$ e $z_0 = a + bi$ ($x, y, a, b \in \mathbb{R}$), o afixo de $z + z_0$ é a imagem do afixo de z pela translação de vetor $\vec{u}(a, b)$.
- O afixo do número complexo $e^{i\theta} \times z$ é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e ângulo generalizado de amplitude θ .
- O afixo do número complexo $z \times z_0$ (z_0 não nulo) é a imagem do afixo de z pela rotação de centro na origem do referencial e ângulo orientado de amplitude θ_0 , argumento de z_0 , composta com a homotetia de centro na origem do referencial e razão $|z_0|$.

Domínios planos e condições na variável complexa

- **Retas paralelas aos eixos coordenados**
 - $\operatorname{Re}(z) = a \rightarrow$ reta vertical, paralela ao eixo imaginário, que passa pelo ponto de coordenadas $(a, 0)$.
 - $\operatorname{Im}(z) = b \rightarrow$ reta horizontal, paralela ao eixo real, que passa pelo ponto de coordenadas $(0, b)$.
- **Circunferência e círculo**
 - $|z - z_1| = r \rightarrow$ circunferência de centro no afixo de z_1 e raio r .
 - $|z - z_1| \leq r \rightarrow$ círculo de centro no afixo de z_1 e raio r .
- **Mediatriz de um segmento de reta e semiplanos**
 - $|z - z_1| = |z - z_2| \rightarrow$ mediatriz do segmento de reta $[AB]$, sendo A e B os afijos de z_1 e z_2 , respetivamente.
 - $|z - z_1| \geq |z - z_2| \rightarrow$ semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta $[AB]$, a que pertence B .
 - $|z - z_1| \leq |z - z_2| \rightarrow$ semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta $[AB]$, a que pertence A .
- **Semirretas e ângulos**
 - $\operatorname{Arg}(z - z_1) = \theta \rightarrow$ semirreta de origem no afixo de z_1 e que forma com a parte positiva do eixo real um ângulo de amplitude θ .
 - $\theta_1 \leq \operatorname{Arg}(z - z_1) \leq \theta_2 \rightarrow$ ângulo de vértice no afixo de z_1 definido por semirretas que formam com a parte positiva do eixo real ângulos de amplitude θ_1 e θ_2 , respetivamente.