



12.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS FUNÇÕES

FUNÇÕES

Função exponencial

- **Função exponencial de base a**

A função f real de variável real definida por uma expressão do tipo $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, designa-se por função exponencial.

- $D_f = \mathbb{R}$;
- $D'_f = \mathbb{R}^+$
- f é injetiva
- f é contínua
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, se $a \in]1, +\infty[$
 f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, se $a \in]0, 1[$
- O gráfico de f tem uma única assíntota, a reta de equação $y = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, se $a \in]1, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$, se $a \in]0, 1[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, se $a \in]1, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, se $a \in]0, 1[$

- **Propriedades da função exponencial**

Sendo $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $a^0 = 1$
- $1^x = 1$

- **Equações e Inequações envolvendo exponenciais**

- $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$, se $a \in]1, +\infty[$
- $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$, se $a \in]0, 1[$

- **Regras de derivação**

- $(e^u)' = u' e^u$
- $(a^u)' = u' a^u \ln a$, ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Número de Neper

O número de Neper é um número irracional (dízima infinita não periódica), representa-se por e , e é dado por:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Função inversa de uma função bijetiva

Dada uma função f , bijetiva, de A em B , a função inversa de f é a função f^{-1} de B em A tal que qualquer que seja $y \in B$, $f^{-1}(y)$ é o único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Resulta que $D_f = D'_{f^{-1}}$ e $D'_f = D_{f^{-1}}$. O gráfico de f^{-1} pode ser obtido do gráfico de f pela reflexão axial cujo o eixo é a reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes ímpares). Deste modo, duas funções são inversas uma da outra, quando representadas no mesmo referencial, as suas representações gráficas são simétricas relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

No caso de uma função ser não injetiva, ela não é invertível.

Função logarítmica

• Função logarítmica de base a

A função $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por uma expressão do tipo $f(x) = \log_a x$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, designa-se por função logarítmica de base a .

- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $D'_f = \mathbb{R}$
- f é injetiva
- f é contínua
- f é estritamente crescente se $a \in]1, +\infty[$
 f é estritamente decrescente se $a \in]0, 1[$
- O gráfico de f tem uma única assíntota, a reta de equação $x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, se $a \in]1, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, se $a \in]0, 1[$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$, se $a \in]1, +\infty[$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$, se $a \in]0, 1[$
- Propriedades
 - * $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}^+$
 - * $\log_a a^x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
 - * $a^{\log_a x} = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

- Logaritmo decimal e logaritmo neperiano
 $\log x \rightarrow$ logaritmo decimal (de base 10)
 $\ln x \rightarrow$ logaritmo neperiano (de base e)

- **Propriedades operatórias da função logaritmo**

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

- **Equações e Inequações envolvendo exponenciais** Sejam $x, y \in \mathbb{R}^+$

- $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$
- $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$
- $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x < y$, se $a \in]1, +\infty[$
 $\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y$, se $a \in]0, 1[$
- $\log_a x < k \Leftrightarrow x < a^k$, se $a \in]1, +\infty[$
 $\log_a x < k \Leftrightarrow x > a^k$, se $a \in]0, 1[$

- **Regras de derivação**

- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Função composta

Sejam f e g duas funções tais que $g: D_g \rightarrow A$ e $f: D_f \rightarrow B$. A função composta de f com g é $f \circ g: D_{f \circ g} \rightarrow B$, tal que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \wedge D_{f \circ g} = \{x: x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}.$$

- Regra derivação: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$.

Regra L'Hopital

A regra de L'Hopital afirma que o limite de um quociente de uma função é igual ao limite do quociente das suas derivadas, ou seja, que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

, desde que determinadas condições sejam satisfeitas, a saber:

- f e g são funções definidas num intervalo aberto I , $a \in I$, e deriváveis em $I \setminus \{a\}$;
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$
- $g'(x) \neq 0$ em I e $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe;

Limites notáveis

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, (p \in \mathbb{N})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty, (p \in \mathbb{N})$

Funções Trigonométricas

- **Limite notável** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- **Derivada de funções trigonométricas**
 - $(\sin u)' = u' \cos u$
 - $(\cos u)' = -u' \sin u$
 - $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Segunda derivada

Chama-se **segunda derivada** de f ou derivada de segunda ordem de f' , função derivada de f , e representa-se por f'' à função tal que $f''(x) = (f'(x))'$.

- **Concavidades e pontos de inflexão**

Seja f uma função real de variável real duas vezes diferenciável num intervalo I .

- O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em I se e só se $\forall x \in I, f''(x) > 0$ (ou seja f' é estritamente crescente em I).
- O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em I se e só se $\forall x \in I, f''(x) < 0$ (ou seja f' é estritamente decrescente em I).

- O ponto de coordenada $(c, f(c))$, com $c \in D_f$, é um ponto de inflexão do gráfico de f se e só se existem números reais $a < c$ e $b > c$ tais que $[a, b] \subset D_f$ e a concavidade do gráfico de f no intervalo $[a, c]$ tem sentido contrário à concavidade do gráfico de f no intervalo $[c, b]$.
- Se f é uma função duas vezes diferenciável num intervalo I e se o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $c \in I$, então $f''(c) = 0$. A afirmação recíproca não é verdadeira.

Continuidade

Seja $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in D_f$, a função f é contínua no ponto a quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

- Se $a \in D_f$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe se e só se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- Se $a \notin D_f$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe se e só se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

- **Função contínua num conjunto**

f é uma função contínua em $A \subset D_f$ quando f é contínua em todos os pontos do conjunto A .

- **Operações com funções contínuas**

Sejam f e g duas funções contínuas em a , então as funções $f + g$, $f - g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (com $g(a) \neq 0$) e f^r ($r \in \mathbb{Q}$) são, também, contínuas em a .

- **Continuidade da função composta**

Seja $a \in D_{g \circ f}$ se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então, $g \circ f$ é contínua em a .

Assíntotas

- **Assíntotas verticais**

- A reta de equação $x = a$ é assíntota vertical ao gráfico de f quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a , for infinito.
- A reta de equação $x = a$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f , em dois casos:
 - * $a \in D_f$, mas f não é contínua em a ;
 - * $a \notin D_f$ e a é um ponto aderente a D_f .

O gráfico de uma função pode não ter assíntotas verticais, pode ter apenas uma, duas, ... ou ter uma infinidade.

- **Assíntotas não verticais**

Para $+\infty$ temos:

- A reta de equação $y = mx + b$ ($m, b \in \mathbb{R}$) é uma assíntota não vertical ao gráfico de f em $+\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

- $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$.
- Se $m = 0 \wedge b \in \mathbb{R}$ a assíntota é horizontal.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge b \in \mathbb{R}$ a assíntota é oblíqua.
- Se pelo menos um dos valores (m ou b) não for um número real, o gráfico de f não tem assíntota não vertical em $+\infty$.

Em $-\infty$ as conclusões são análogas. Se o domínio for um conjunto limitado então o gráfico não tem assíntotas não verticais. Se for um conjunto minorado e não majorado, apenas pode ter assíntotas não verticais em $+\infty$ e se não for minorado e for majorado apenas pode ter em assíntotas não verticais em $-\infty$.

Resolução aproximada de equações

• Teorema dos valores intermédios ou Teorema de Bolzano-Cauchy

Seja f uma função real de variável real contínua num intervalo $[a, b] \subset D_f$.

Então, para qualquer $k \in \mathbb{R}$ do intervalo aberto de extremos $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um número real $c \in]a, b[$, tal que, $f(c) = k$.

• Método da bissecção

É um método numérico que permite obter um valor aproximado da solução da equação $f(x) = 0$, baseando-se no Teorema dos Valores Intermédios ou Teorema de Bolzano-Cauchy e na subdivisão sucessiva de um intervalo que garante a solução, ou seja, dado um intervalo $I_0 = [a, b]$, vai construir-se uma sucessão de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$, cada um contendo a solução da equação.

Condições de aplicação

- f é contínua num intervalo inicial $I_0 = [a, b]$;
- $f(a) \times f(b) < 0$, ou seja, $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários.

Etapas do processo iterativo

- Calcula-se o ponto médio de I_0 , obtendo-se x_1 ;
- Escolhe-se o subintervalo I_1 , definido por x_1 e por um dos extremos de I_0 , de forma a manter a mudança de sinal das suas imagens por f ;
- Repete-se o processo no intervalo $I_1, I_2, \dots$ para obter $x_2, x_3, \dots$

Cada repetição do processo descrito constitui uma **iteração** do método.

O processo termina se, em algum passo, $f(x_n) = 0$ ou se verifique algum dos critérios de paragem pré-definidos (número máximo de iterações, amplitude do intervalo, etc.).

Sendo f uma função contínua num intervalo $[a, b]$, com $f(a) \times f(b) < 0$, o método da bissecção permite-nos obter valores de x , cada vez mais próximos da solução da equação $f(x) = 0$, sendo o erro absoluto menor ou igual a $\frac{b-a}{2^n}$, que tenderá a ser zero à medida que n aumenta.

• Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um método numérico que permite obter um valor aproximado de uma solução da equação $f(x) = 0$, sendo f uma função derivável, recorrendo a sucessivas aproximações através da fórmula $x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Geometricamente, corresponde a obter valores aproximados da solução através das retas tangentes ao gráfico da função.

Condições de aplicação

- f é derivável num intervalo $[a, b]$ que contém a solução pretendida e tal que $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$;
- Considera-se um valor inicial x_0 suficientemente próximo da solução.

Etapas do processo iterativo

Partindo do valor inicial x_0 :

- Calcula-se $f(x_0)$ e $f'(x_0)$;
- Aplica-se a fórmula: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Se em algum passo se obtiver um valor x_n tal que $f(x_n) = 0$, a solução fica determinada e o processo termina.

Caso contrário, o processo é repetido até que a precisão desejada seja alcançada.