



12.º ANO | MATEMÁTICA A

RESUMOS PROBABILIDADE

ANTÓNIO LEITE | 2026

PROBABILIDADE

- **Fenómeno determinista** é aquele que quando realizado nas mesmas condições, é possível conhecer o resultado, mesmo antes de concretizar qualquer experiência.
- **Fenómeno aleatório** é aquele que o resultado é incerto, portanto, os resultados das experiências apenas são conhecidos após a concretização das mesmas.
- À concretização de um fenômeno dá-se o nome de **experiência**, que pode ser **determinística** ou **aleatória**.
- Uma **experiência aleatória** é uma concretização de um fenômeno aleatório que conduz a um resultado que não pode ser previsto, embora sejam conhecidos os possíveis resultados.
- **Espaço de resultados** ou **espaço amostral** é o conjunto dos resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Habitualmente, representa-se por S , E ou Ω .

- Um **acontecimento** é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento.

Os acontecimentos dizem-se:

- **elementares** quando são constituídos por um e um só resultado que lhe é favorável;
- **compostos** quando são constituídos por mais do que um resultado que lhe é favorável;
- **impossíveis** quando nunca ocorrem, ou seja, são iguais ao conjunto vazio;
- **certos** quando ocorrem sempre, ou seja, quando são iguais ao espaço de resultados.

Operações com acontecimentos

Sejam Ω o conjunto finito que é o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e A e B dois acontecimentos, ambos contidos em Ω .

- **Acontecimento união** dos acontecimentos A e B é o acontecimento constituído por todos os resultados de A ou de B . Representa-se por $A \cup B$.
- **Acontecimento interseção** dos acontecimentos A e B é o acontecimento constituído pelos resultados que pertencem, simultaneamente, a A e a B . Representa-se por $A \cap B$.
- **Acontecimentos disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** ou **incompatíveis** são acontecimentos que não têm resultados comuns.

- O **acontecimento complementar** ou **acontecimento contrário** do acontecimento A é o acontecimento constituído por todos os resultados do espaço de resultados que não pertencem a A . Representa-se por $\bar{A}$.

Portanto, se A e B são acontecimentos disjuntos, então, $A \cap B = \emptyset$ e se A e B são acontecimentos contrários, então, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$. Resulta, assim, que dois acontecimentos contrários são sempre acontecimentos disjuntos, porém, o recíproco pode não ser verdadeiro.

Modelo de Probabilidade

A construção de um modelo de probabilidade num espaço de resultados finito, obriga a recorrer a um processo que permita determinar as probabilidades dos acontecimentos elementares que satisfazem as duas condições seguintes:

- a probabilidade de cada um pertence ao intervalo de números reais $[0, 1]$;
- a soma dessas probabilidades é igual a 1.

Probabilidade frequencista

A probabilidade frequencista de um acontecimento A , que se representa por $P(A)$, é o valor para que tende a estabilizar a frequência relativa da realização desse acontecimento à medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, isto é, é repetida um “grande” número de vezes.

Regras da probabilidade (em espaços de resultados finitos)

- A probabilidade de cada acontecimento elementar é um número real entre 0 e 1;
- A soma das probabilidades dos acontecimentos elementares é igual a 1;
- A probabilidade de um acontecimento composto A , ou seja, $P(A)$, é a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares que compõem A .

Probabilidade da união de acontecimentos

Dada uma experiência aleatória em que o espaço de resultados é Ω , sendo A e B acontecimentos, tais que $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Outras propriedades das probabilidades

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- Se A e B são dois acontecimentos disjuntos, tem-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Regra de Laplace

Seja o conjunto finito Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, sendo os acontecimentos elementares equiprováveis, então, a probabilidade de um acontecimento A , onde $A \subset \Omega$, é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis a } A}{\text{número de resultados possíveis}}.$$

Portanto, $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

Os acontecimentos elementares são **equiprováveis** quando não existe à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.

Probabilidade Condicionada

Sejam o conjunto finito Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e A e B dois acontecimentos, tais que, $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$, com $P(B) > 0$, representa-se por $P(A|B)$ a probabilidade de ocorrência de A , na hipótese de B se ter realizado. Essa probabilidade é tal que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

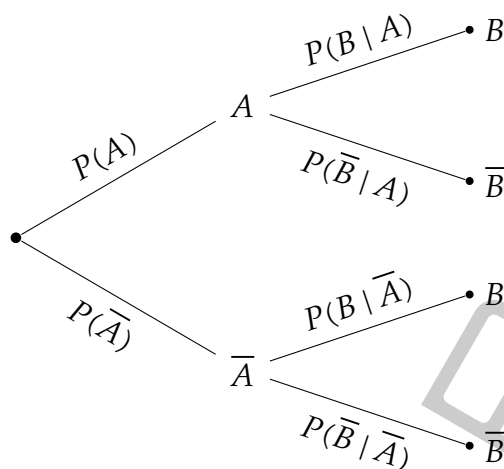
Regra do Produto

- Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, com $P(B) > 0$, então, $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$.
- De modo análogo, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, com $P(A) > 0$, então, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$.

Repare que $P(A \cap B) = P(B \cap A)$.

Árvore de probabilidades

Normalmente, é útil para organizar a informação disponível sobre acontecimentos em cadeia.



Tabelas de contingência

Normalmente, são úteis para calcular a probabilidade condicionada.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Acontecimentos independentes

Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma experiência aleatória, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

- A é independente de B quando $P(A|B) = P(A)$;
- B é independente de A quando $P(B|A) = P(B)$;
- A e B são acontecimentos independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;
- A e B são acontecimentos dependentes se e só se não forem independentes.

Teorema da probabilidade total

A obtenção da probabilidade de um certo acontecimento B , quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas por acontecimentos $A_1, A_2, \dots, A_n$, mutuamente exclusivos e tal que a sua união é igual ao espaço de resultados, isto é, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, e é conhecido o modelo de probabilidade para estes acontecimentos:

$$P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \times P(A_n).$$

Variáveis aleatórias (discretas) e contínuas

- Uma **variável aleatória** é uma variável cujo valor é um resultado numérico associado a cada resultado de uma experiência aleatória.
- Uma **variável aleatória é discreta** se só tomar um número finito ou infinito numerável de valores distintos.
- Uma **variável aleatória é contínua** se toma qualquer valor de um intervalo ou reunião de intervalos de números reais.
- As variáveis aleatórias representam-se por letras maiúsculas como, por exemplo, X, Y e Z . Os valores possíveis dessas variáveis aleatórias representam-se por letras minúsculas como, por exemplo, x, y e z .

Função massa de probabilidade

Dada uma variável aleatória discreta X , que assume um número finito de valores distintos $x_1, x_2, \dots, x_n$, as probabilidades $p_i = P(X = x_i)$, com $i = 1, 2, \dots, n$, são tais que:

- $0 \leq p_i \leq 1$
- $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Chama-se **função massa de probabilidade** ou **função de probabilidade** de X à função que a cada x_i faz corresponder $p_i = P(X = x_i)$.

Os pares (x_i, p_i) , com $i = 1, 2, \dots, n$, constituem a distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

Parâmetros: valor médio e desvio-padrão populacional.

- Chama-se **valor médio** μ (lê-se: miu) de uma variável aleatória (x_i, p_i) , com $i = 1, 2, \dots, n$, como sendo o valor que se obtém multiplicando cada valor x_i pela respectiva probabilidade p_i e adicionando os resultados obtidos, isto é,

$$\mu = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n \quad \text{ou seja,}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

- Chama-se **desvio-padrão (populacional)** da variável aleatória X ao valor σ (lê-se: sigma) dado por:

$$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + p_2(x_2 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2}.$$

- Ou seja,

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i(x_i - \mu)^2}.$$

Modelo normal

Uma distribuição normal fica caracterizada pelo seu valor médio μ e pelo desvio-padrão σ . Se a variável aleatória contínua X segue uma distribuição normal, então, escreve-se $X \sim N(\mu, \sigma)$.

Propriedades da curva normal

O modelo normal é representado graficamente por uma curva:

- que tem aspeto de um "sino";
- que é simétrica em relação a um eixo caracterizado pelo valor médio μ ;
- cujo máximo é a imagem de μ ;
- cuja distância entre o valor médio e cada uma das abcissas dos pontos onde a curva muda a concavidade é igual ao desvio-padrão;
- em que quanto maior for o desvio-padrão, mais achatada é a curva.

Valores de referência da distribuição normal

- $P(X > \mu) = P(X < \mu) = 50\%$
- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68,27\%$
- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95,45\%$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99,73\%$