FICHA 6

António Leite

1. Prove as seguintes igualdades:

   1.1. $\dfrac{\frac{1}{\cos\alpha}}{1-\tan\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

   1.2. $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha\right)^2 = \dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

2. Um agricultor pretende irrigar uma das suas terras, dispondo para o efeito de um aspersor central com um alcance de 25 metros (distância que a água atinge, medida a partir do aspersor).

   Devido às restrições de consumo de água implementadas, na sua região, apenas pode irrigar, diariamente, uma parte das suas terras. Após alguns estudos, realizados pelo Departamento de Ambiente local, concluiu-se que podem ser irrigados por dia, um setor circular com centro no aspersor e com 130° de amplitude.

   Qual o valor exato, em metros quadrados, da área irrigada diariamente?

3. Sabe-se que $\sin\beta\cos\beta = \frac{12}{25}$ e $\beta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

   3.1. Mostre que $\dfrac{(1+\tan\beta)^2}{1+\tan^2\beta} = (\sin\beta + \cos\beta)^2$, para qualquer $\beta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$.

   3.2. Qual o valor da expressão $\dfrac{(1+\tan\beta)^2}{1+\tan^2\beta}$?

   (A) $\frac{19}{25}$ **(B)** $\frac{24}{25}$ **(C)** $\frac{49}{25}$ **(D)** 2

4. Calcule o valor exato de:

   4.1. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - 2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

   4.2. $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + 2\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 3\tan\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

   4.3. $\tan\left(-\frac{17\pi}{3}\right) + 2\cos(-12\pi) - 3\tan\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$

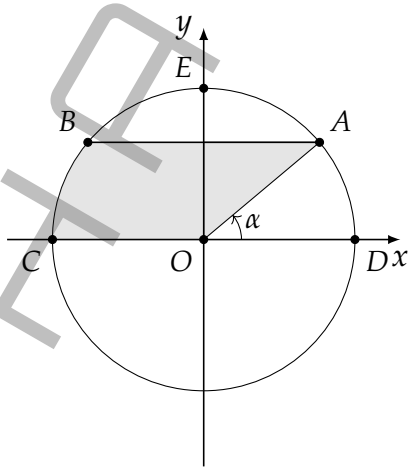
   4.4. $2\sin\left(\frac{11\pi}{3}\right) - 3\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right) + 2\tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$

   4.5. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - 2\sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right) - 3\tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$

PLANO A

5. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio $\sqrt{2}$.
Sabe-se que:

- os pontos C e D pertencem ao eixo Ox
- $[CD]$ é um diâmetro da circunferência
- o ponto E pertence ao semieixo positivo Oy
- o ponto A desloca-se ao longo do arco DE, nunca coincidindo com o ponto D, nem com o ponto E
- para cada posição do ponto A, considere a região sombreada, onde a corda $[AB]$ é sempre paralela ao diâmetro $[CD]$.
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOA



5.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de α, por $\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

5.2. Admita que, para uma certa posição do ponto A, se tem $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Determine, para essa posição do ponto A, o valor exato da área da região sombreada.

FIM

PLANO PHP

Soluções

2. $\frac{8125\pi}{36}$

3.

3.2. **(C)**

4.

4.1. 2

4.2. $2 - \frac{7\sqrt{3}}{2}$

4.3. $-1 + \sqrt{3}$

4.4. $2 - \sqrt{3} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4.5. $-3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.

5.2. $\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}$