PROPOSTA DE RESOLUÇÃO
TESTE 1

António Leite

ALANDALP

1. Tem-se que:

$$A = \{2,3,5,7\}, \quad B = \{4,6,8,10\} \quad \text{e} \quad C = \{3,6,9\}.$$

- Como $A \cap B = \emptyset$, os acontecimentos A e B são incompatíveis.
  Como $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7,8,10\} \neq E$, os acontecimentos A e B não são contrários.
- $B \cap C = \{6\}$, pelo que
$$P(B \mid C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}.$$
- $\overline{B} = \{1,2,3,5,7,9\}$ e $\overline{B} \cap C = \{3,9\}$, pelo que
$$P\left(\overline{B} \cap C\right) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Logo, as correspondências corretas são:

$$\textbf{I} \to b) \ ; \ \textbf{II} \to c) \ \text{ e } \ \textbf{III} \to b).$$

2. O número de casos possíveis é ${}^{27}C_6 = 296\,010$, que corresponde ao número de comissões de 6 alunos que é possível formar com os 27 alunos da turma.

Para que a comissão inclua a rapariga mais alta e tenha, no máximo, duas raparigas, há dois casos a considerar:

- a comissão tem duas raparigas (a mais alta e uma das outras três) e quatro rapazes, escolhidos de entre os 23 rapazes da turma:
$$1 \times {}^{3}C_1 \times {}^{23}C_4 = 26\,565;$$
- a comissão tem apenas uma rapariga (a mais alta) e cinco rapazes:
$$1 \times {}^{23}C_5 = 33\,649.$$

Assim, o número de casos favoráveis é $26\,565 + 33\,649 = 60\,214$.

Portanto, a probabilidade pedida é

$$\frac{60\,214}{296\,010} = \frac{119}{585}.$$

3. O número de diagonais de um polígono convexo com n lados é dado por ${}^nC_2 - n$ (número de segmentos de reta definidos por dois vértices, retirando os n lados).

   Assim, uma equação que traduz o problema é ${}^nC_2 - n = 77$.

   Resolvendo a equação:

$$\begin{aligned} {}^nC_2 - n = 77 &\Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 77 \\ &\Leftrightarrow n^2 - n - 2n = 154 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 3n - 154 = 0 \\ &\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-154)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm 25}{2} \\ &\Leftrightarrow n = 14 \quad \vee \quad n = -11 \end{aligned}$$

   Como $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{N}$, então $n = 14$.

   Portanto, o polígono tem 14 lados.

4. Considerem-se os acontecimentos:

   C: «o sócio pratica Caça»

   A: «o sócio pratica Pesca»

   Sabe-se que $P(C) = 0{,}8$, $P\left(\overline{A} \mid C\right) = 0{,}25$ e $P\left(\overline{C} \cap A\right) = 0{,}05$. Pretende-se determinar $P(C \mid A)$.

   Tem-se que

$$P\left(\overline{A} \mid C\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap C\right)}{P(C)} \Leftrightarrow 0{,}25 = \frac{P\left(\overline{A} \cap C\right)}{0{,}8} \Leftrightarrow P\left(\overline{A} \cap C\right) = 0{,}2.$$

   Organizando os dados numa tabela (a sombreado, os valores conhecidos):

	C	$\overline{C}$	Total
A	0,6	0,05	0,65
$\overline{A}$	0,2	0,15	0,35
Total	0,8	0,2	1

   Assim,

$$P(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}6}{0{,}65} = \frac{12}{13}.$$

PLANOALPHA

5. O número de casos possíveis é 12^{20}, uma vez que cada um dos 20 quadrados pode ser colorido com qualquer uma das 12 cores.

   Quanto ao número de casos favoráveis:

   - ${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher as duas filas verticais cujos quadrados são coloridos de azul;
   - ${}^3C_1$ é o número de maneiras de escolher, de entre as três filas verticais restantes, a fila cujos quadrados são coloridos de vermelho;
   - ${}^{10}A_8$ é o número de maneiras de colorir os restantes 8 quadrados com cores todas diferentes, escolhidas de entre as 10 cores que não são azul nem vermelho.

   Portanto, uma expressão que permite determinar a probabilidade pedida é

   $$\frac{{}^5C_2 \times {}^3C_1 \times {}^{10}A_8}{12^{20}}.$$

6. Como A e B são acontecimentos equiprováveis, $P(A) = P(B)$, e como são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

   Assim,

   $$\begin{aligned} P(A \cap B) = \frac{9}{16} &\Leftrightarrow P(A) \times P(B) = \frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow P(B) \times P(B) = \frac{9}{16} \\ &\Leftrightarrow [P(B)]^2 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

   Como $P(B) > 0$, vem $P(B) = \frac{3}{4}$.

   Então,

   $$P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

PLANOALPHA

7. O número de casos possíveis é 6!, que corresponde ao número de maneiras de distribuir os seis bilhetes pelas seis pessoas.

   O número de casos favoráveis é $2! \times 4!$: o António e a Luísa podem trocar entre si os dois lugares do meio (2! maneiras) e os quatro amigos podem ocupar os restantes quatro lugares de 4! maneiras.

   Portanto, a probabilidade pedida é

$$\frac{2! \times 4!}{6!} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}.$$

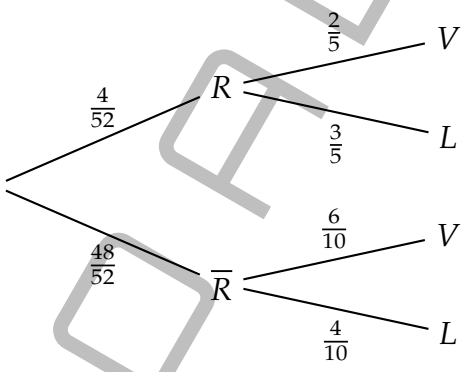
8. Considerem-se os acontecimentos:

   R: «sair rei»

   V: «ser retirada bola verde»

   L: «ser retirada bola laranja»

   Como o baralho tem 4 reis, $P(R) = \frac{4}{52}$ e $P\left(\overline{R}\right) = \frac{48}{52}$.



   Assim,

$$\begin{aligned}
P(L) &= P(L \cap R) + P\left(L \cap \overline{R}\right) \\
&= P(L \mid R) \times P(R) + P\left(L \mid \overline{R}\right) \times P\left(\overline{R}\right) \\
&= \frac{3}{5} \times \frac{4}{52} + \frac{4}{10} \times \frac{48}{52} \\
&= \frac{12}{260} + \frac{192}{520} \\
&= \frac{216}{520} \\
&\approx 0{,}42
\end{aligned}$$

   Portanto, a probabilidade de ser retirada bola laranja é, aproximadamente, 0,42.

PLANO ALPHA

9.

9.1. Tem-se que

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,-2) - (-1,4) = (4,-6),$$

pelo que o declive da reta AB é

$$m_{AB} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Sendo α a inclinação da reta AB, tem-se $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$, com $\alpha \in]90°, 180°[$, uma vez que o declive é negativo.

Assim,

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) + 180° \approx 123{,}7°.$$

9.2. Tem-se que

$$r : ax + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x + \frac{5}{2},$$

pelo que o declive da reta r é $m_r = -\frac{a}{2}$.

As retas AB e r são perpendiculares se e só se $m_r \times m_{AB} = -1$. Assim,

$$-\frac{a}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{3a}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

10. De acordo com a regra de Laplace, numa experiência aleatória cujo espaço amostral é um conjunto finito e cujos casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis.

No primeiro lançamento do dado existem 6 casos possíveis e, para cada um destes, no segundo lançamento existem, novamente, 6 casos possíveis, pelo que o número de casos possíveis é dado por $6 \times 6 = 6^2$.

Para calcular quantas somas, das 36 possíveis, são iguais a 6, temos de identificá-las:

- $2 + 4$ ou $4 + 2$, que corresponde a 2! casos, já que a ordem é relevante (porque também a considerámos no cálculo do número de casos possíveis);
- $1 + 5$ ou $5 + 1$, que corresponde, igualmente, a 2! casos;
- $3 + 3$, que corresponde apenas a um caso.

Portanto, o número de casos favoráveis é dado por $1 + 2! + 2!$.

Assim, a probabilidade pedida, aplicando a regra de Laplace, é igual a

$$\frac{1 + 2! + 2!}{6^2}.$$

FIM

PLANOPHA